

Napište za sebou bez mezer prvních deset prvočísel, počínaje číslem 2. V získaném čísle umažte polovinu číslic tak, aby vzniklé číslo bylo co největší. Jaká je pátá číslice zleva tohoto čísla?

Řešení:

Vypsaná prvočísla bez mezer (16číslic): 2 3 5 7 1 1 1 3 1 7 1 9 2 3 2 9 **4b.**

Vyškrtnutí (8číslic): ~~2~~ ~~3~~ ~~5~~ 7 ~~1~~ ~~1~~ ~~1~~ 3 ~~1~~ 7 1 9 2 3 2 9 **4b.**

Pátá číslice zleva: 7 7 1 9 2 3 2 9

Odpověď: Pátá číslice nalezeného čísla je 2. **2b.**

Čemu je roven součet $x + y + z$, jestliže $yz = -6$, $zx = 2$, $xy = -3$.

Řešení:

$$yz = -6$$

$$zx = 2 \quad \Rightarrow z = \frac{2}{x}$$

$$xy = -3 \quad \Rightarrow y = -\frac{3}{x}$$

$$-\frac{3}{x} \cdot \frac{2}{x} = -6$$

$$-6 = -6x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$|x| = 1$$

a)

$$x = 1$$

$$y = -3$$

$$z = 2$$

$$1 - 3 + 2 = 0$$

b)

$$x = -1$$

$$y = 3$$

$$z = -2$$

$$-1 + 3 - 2 = 0$$

Součet $x + y + z$ je roven 0.

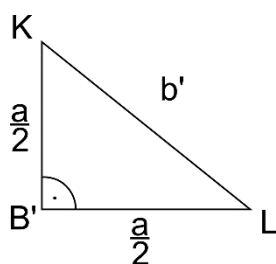
Na krychli $ABCD A'B'C'D'$ o hraně a jsou body K, L, M po řadě středy hran $A'B', BB', C'B'$. Vypočítejte povrch a objem čtyřstěnu $KLMB'$.

Řešení:Povrch:

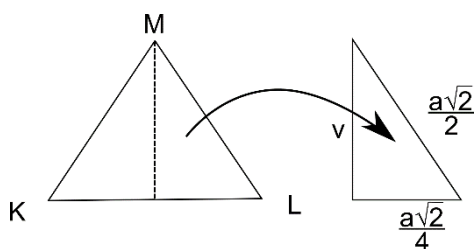
S_1 ... obsah pravoúhlého trojúhelníku $KB'L$

$$S_1 = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

S_2 ... obsah rovnostranného trojúhelníku KLM



$$b' = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$v = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \sqrt{\frac{8a^2 - 2a^2}{16}} = \sqrt{\frac{6a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$S_2 = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{12}}{16} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

$$S = 3S_1 + S_2 = 3 \cdot \frac{a^2}{8} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2}{8}(3 + \sqrt{3})$$

Objem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot |LB'| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$$

Odpověď: Plocha čtyřstěnu je $\frac{a^2}{8}(3 + \sqrt{3})$ a jeho objem je $\frac{a^3}{48}$.

V R řešte rovnici: $2\log(x^2 - 1) - \log(x - 1)^2 + \log\sqrt{x+1} = 5\log\sqrt{20}$

Řešení:

Podmínka: $x \in (1; \infty)$

$$2\log(x^2 - 1) - \log(x - 1)^2 + \log\sqrt{x+1} = 5\log\sqrt{20}$$

$$\log(x^2 - 1)^2 - \log(x - 1)^2 + \log\sqrt{x+1} = \log\sqrt{20}^5$$

$$\log \frac{(x^2 - 1)^2 \sqrt{x+1}}{(x - 1)^2} = \log 20^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{(x+1)^2(x-1)^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^2} = 20^{\frac{5}{2}}$$

$$(x+1)^{\frac{5}{2}} = 20^{\frac{5}{2}}$$

$$x+1 = 20$$

$$x = 19$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L &= 2\log(19^2 - 1) - \log(19 - 1)^2 + \log\sqrt{19+1} = 2\log 360 - \log 324 + \log\sqrt{20} \\ &= \log \frac{360^2}{324} \sqrt{20} = \log 400\sqrt{20} \end{aligned}$$

$$P = 5\log\sqrt{20} = \log\sqrt{20}^5 = \log 400\sqrt{20}$$

$$L = P$$

Sestrojte graf funkce $f: y = \frac{4x+9}{x+2}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení:**Řešení 1:**

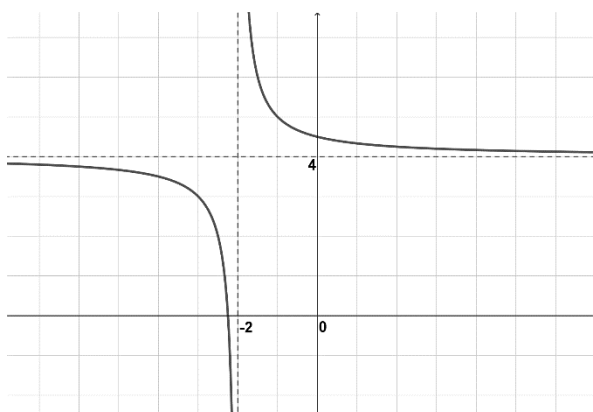
Nejdříve upravíme výraz $\frac{4x+9}{x+2}$ tak, abychom mohli užít poznatky o grafu nepřímé úměrnosti:

$$(4x + 9) \div (x + 2) = 4 + \frac{1}{x + 2}$$

$$\frac{-(4x + 8)}{1}$$

Jde tedy o posunutí hyperboly, která je grafem funkce $\frac{1}{x}$ do nového středu $S[-2; 4]$.

Graf:

**Řešení 2:**

Lineárně lomená funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, jejím grafem je rovnoosá hyperbola se středem $S = \left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$ a asymptoty hyperboly jsou $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$.

$$y = \frac{4x + 9}{x + 2}$$

$$\text{Střed: } S = \left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right] = \left[-\frac{2}{1}; \frac{4}{1}\right] = [-2; 4]$$

Tabulka hodnot

x	-6	-4	-3	-2,25	-1	0	2
y	3,75	3,5	3	0	5	4,5	4,25

např.:

Definiční obor: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Obor hodnot: $H_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$