

Čtyři kamarádi jsou malíři – amatéři. Po dovolených se každý pochlubil svým nejnovějším obrazem. Určete jméno a příjmení každého malíře a obraz, který namaloval.

- a) Miloš není Příhoda a nemaloval rybník
- b) Jeden malíř se jmenuje Pavel
- c) Luboš není Příhoda a maloval mlýn
- d) Nekolný si letošní dovolenou pochvaloval
- e) Příhoda není autorem topolové aleje ani rybníku
- f) Radek se nejmenuje Jirák a nemaloval náves
- g) Autorem mlýnu není Jirák ani Malát

**Řešení:**

Pavel Příhoda – náves

Luboš Nekolný – mlýn

Miloš Jirák – alej

Radek Malát - rybník

**S4 / 2**

**Celkem 10 b.**

Řešte soustavu rovnic, jestliže  $x, y \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}(10x + y)^2 - 22xy &= 400 \\ (10y + x)^2 - 208xy &= 100\end{aligned}$$

---

**Řešení:**

$$\begin{aligned}(10x + y)^2 - 22xy &= 400 \\ (10y + x)^2 - 208xy &= 100\end{aligned}$$

Po umocnění a sečtení:

---

$$\begin{aligned}100x^2 - 2xy + y^2 &= 400 \\ 100y^2 - 188xy + x^2 &= 100 \quad / \cdot 4\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}100x^2 - 2xy + y^2 &= 400 \\ 400y^2 - 752xy + 4x^2 &= 400\end{aligned}$$

---

Odečteme:

$$\begin{aligned}399y^2 - 750xy - 96x^2 &= 0 \quad / : 3 \\ 133y^2 - 250xy - 32x^2 &= 0\end{aligned}$$

Protože  $x \neq 0$ , můžeme tuto rovnici dělit  $x^2$

$$133 \frac{y^2}{x^2} - 250 \frac{y}{x} - 32 = 0$$

Zavedeme substituci  $z = \frac{x}{y}$

$$133z^2 - 250z - 32 = 0$$

Diskriminant této rovnice je:

$$D = 79524, \sqrt{D} = 282$$

Kořeny této rovnice jsou:

$$z_1 = 2, z_2 = -\frac{16}{133}$$

Vrátíme se zpět k substituci:

$$\frac{x}{y} = 2 \quad \text{nebo} \quad \frac{x}{y} = -\frac{16}{133}$$

Vzhledem k tomu, že  $x, y \in \mathbb{N}$ , vyhovuje pouze  $\frac{x}{y} = 2$ , tedy  $y = 2x$

Dosadíme  $y = 2x$  do  $100x^2 - 2xy + y^2 = 400$

$$100x^2 - 4x^2 + 4x^2 = 400$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

$x_2 \notin \mathbb{N}$ ,  $x_1 = 2$  dosadíme do  $y = 2x = 2 \cdot 2 = 4$

Řešením soustavy rovnic je  $\mathbf{K} = \{[2; 4]\}$

**S4 / 3****Celkem 10 b.**

Je dána krychle  $ABCDEFGH$  s hranou délky  $9\text{ cm}$ . Vypočítejte vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $AFH$ .

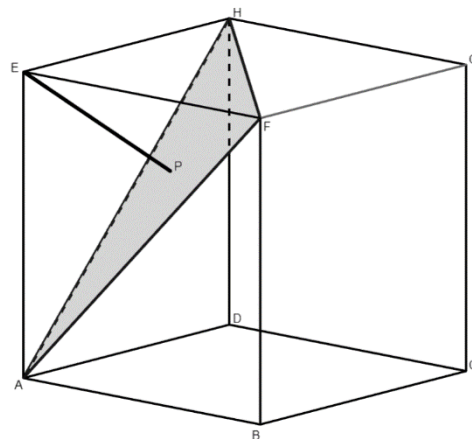
**Řešení:**

Lze řešit jako velikost výšky  $v$  v jehlanu s podstavou  $AFH$  a vrcholem  $E$ .

Trojúhelník  $AFH$  je rovnostranný, jehož každá strana je stěnová úhlopříčka  $u$  krychle  $ABCDEFGH$

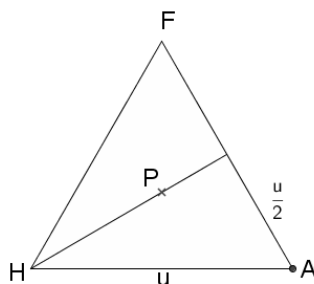
$$u = \sqrt{9^2 + 9^2} = \sqrt{162}$$

Označme  $P$  patu kolmice z vrcholu  $E$  na rovinu podstavy jehlanu  $AFH$ , ta je v průsečíku výšek a těžnic (označme jednu z nich  $x$ ) trojúhelníku  $AFH$ , tedy ve dvou třetinách od vrcholu trojúhelníku.

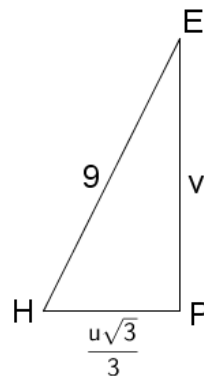


$$x = \sqrt{u^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3u^2}{4}} = \frac{u\sqrt{3}}{2}$$

$$|HP| = \frac{2}{3} \frac{u\sqrt{3}}{2} = \frac{u\sqrt{3}}{3}$$



$$v = \sqrt{9^2 - \left(\frac{u\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{81 - \frac{u^2}{3}} = \sqrt{\frac{243 - 162}{3}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$



Odpověď: Vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $AFH$  je  $3\sqrt{3}\text{ cm}$ .

**S4 / 4**

**Celkem 10 b.**

Prvním a druhým členem aritmetické posloupnosti jsou po řadě čísla  $\log_2 3$  a  $\log_2 9$ . Jestliže šestý člen této posloupnosti označíme  $x$ , čemu se rovná číslo  $2^x$ ?

**Řešení:**

Diference aritmetické posloupnosti:

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = \log_2 9 - \log_2 3 = \log_2 \frac{9}{3} = \log_2 3$$

Šestý člen aritmetické posloupnosti:

$$a_6 = a_1 + (n - 1)d$$

$$x = a_6 = \log_2 3 + (6 - 1) \log_2 3 = 6 \cdot \log_2 3$$

$$2^x = 2^{6 \cdot \log_2 3}$$

$$\mathbf{2^x = 729}$$

Druhé mocniny po sobě jdoucích přirozených čísel jsou zapsány za sebou: 1491625364964....  
Jaká číslice je na 100. místě?

**Řešení:**

Druhé mocniny čísel 1 až 3 jsou jednociferné, takže zaujmou první 3 „místa“.

Druhé mocniny čísel 4 až 9 jsou dvouciferné a zaujmou 6 x 2 místa, tedy 4. až 15. pozici.

Nejvyšší přirozené číslo, jehož druhá mocnina je tříciferná, je číslo 31.

Druhé mocniny čísel 10 až 31 zaujmou 22 x 3 míst, což znamená, že zaujmou 16. až 81. pozici.

Do té pozice zbývá 19 míst. Následují čísla, jejichž druhá mocnina je čtyřciferná.

Na té pozici tedy je třetí cifra z druhé mocniny čísla o pět většího než 31 (tím je 36) –  $36^2=1296$ . Na stém místě je číslice 9.