

Grafické řešení vybraných úloh ze statiky

Elektronická cvičebnice

Petr Kopelec

Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu CZ.1.07/1.1.07/03.0027
Tvorba elektronických učebnic

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

OBSAH

1	Základní úlohy statiky	3
2	Určení síly v rovině	4
3	Výslednice sil	8
3.1	Síly na jedné nositelce	8
3.2	Síly se společným působištěm – svazek sil	11
3.3	Soustava rovnoběžných sil	13
3.4	Obecná soustava sil	15
4	Prutová soustava	19

ZÁKLADNÍ ÚLOHY STATIKY

1 Základní úlohy statiky

Statika jako jedno z odvětví mechaniky tuhých látek se zabývá vzájemným působením těles. Toto vzájemné působení je vyjádřeno silovými účinky. Síla je fyzikální veličina charakterizující vzájemné působení těles, při kterém se mění jejich polohový či pohybový stav, nebo se tělesa deformují.

Statika pracuje se silami bez ohledu na to, co způsobují. Je to nauka o skládání, rozkládání a rovnováze sil, které působí na těleso, které je v klidu, nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.

Při řešení úloh ze statiky lze kromě početních metod použít i metod grafických. Grafické metody jsou obvykle rychlé a při pečlivém rýsování i dostatečně přesné. S výhodou jich lze použít například pro kontrolu početního řešení úloh ze statiky.

Grafickými metodami lze řešit tyto základní úlohy statiky:

- Určení velikosti a polohy výslednice soustavy sil. Výslednicí rozumíme jednu sílu, která nahrazuje současné působení několika sil (soustavy sil) na dané těleso. Výslednice má na těleso stejné posuvné i rotační účinky jako soustava sil, kterou nahrazuje.
- Řešení rovnováhy soustavy sil. Rovnováha sil je stav, kdy se účinek všech sil, které na těleso působí, navzájem ruší. Hledáme tedy jednu, nebo více sil, které způsobí, že výslednice všech působících sil (včetně těch, které hledáme), bude rovna nule.

Z principů těchto dvou základních úloh vycházejí grafická řešení úloh statiky.

Jednotkou pro měření velikosti síly je v soustavě SI 1 newton ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). Velikost jednoho newtonu má síla, která udělí tělesu o hmotnosti 1 kg zrychlení $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Tato cvičebnice se zabývá grafickým řešením statických úloh v rovině. Řešení prostorových úloh je obdobné, je nutno však řešit polohy a sklony sil navíc i vzhledem ke třetí ose.

Práce s cvičebnicí:

V textu je vždy nejprve uveden krátký teoretický základ úlohy - na záložce označeno slovem TEORIE.

V následujícím řešeném příkladu je nastíněn podrobný popis postupu řešení dané úlohy (**popis prováděných činností je odlišen modrou barvou písma**) - na záložce označeno slovy ŘEŠENÝ PŘÍKLAD.

Úroveň pochopení popsaného postupu řešení a jeho aplikace na podobné příklady si lze vyzkoušet na neřešených příkladech, u kterých je uveden pouze výsledek - na záložce označeno slovy NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY.

Grafická řešení jsou převážně kreslena v měřítku, které je u řešení uvedeno. Pokud rozměry neodpovídají uvedenému měřítku – obvykle z důvodu úspory místa v učebnici – jsou obrázky ohraničeny rámečkem černé barvy.

URČENÍ SÍLY V ROVINĚ

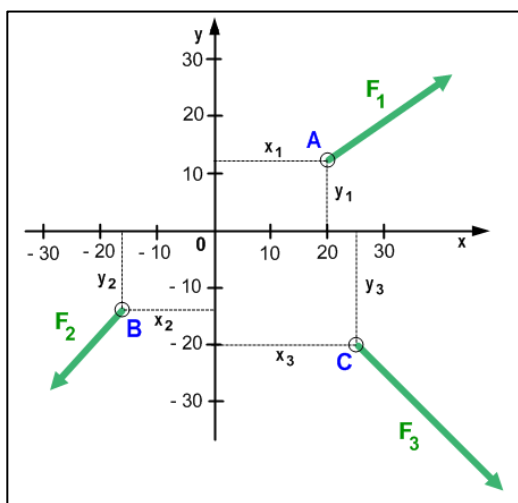
2 Určení síly v rovině

Z fyziky víme, že síla je vektor. Vektory lze zobrazovat jako orientované úsečky. Tuto vlastnost využijeme pro grafické řešení úloh ze statiky. K určení síly jako vektoru je třeba zadat:

- působiště síly (místo, ve kterém na těleso působí),
- směr a smysl, kterým síla působí,
- velikost síly.

Abychom jednotlivé síly od sebe odlišili, označujeme je obvykle písmeny velké abecedy a pokud je třeba, používáme indexy, např. F_1 , R_A , F_{3x} a podobně.

Působiště síly v rovině určujeme pomocí pravoúhlé soustavy souřadnic. Bod 0 je počátek souřadné soustavy a x , y jsou vzájemně kolmé osy. Poloha působiště je dána souřadnicemi na osách x a y . Působiště můžeme označit jako bod písmenem velké abecedy (např. A). Pokud je potřeba, kreslíme vzdálenosti v měřítku délek. Použité měřítko je nutno u řešeného příkladu zapsat; např. $m_1 : 0,1\text{m} \hat{=} 1\text{mm}$, nebo jiným zápisem $m_1 = 0,1\text{ m/mm}$.



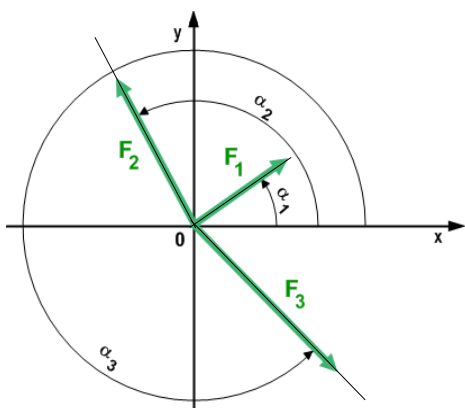
Příklady zakreslení působiště:

A ($x_1 = 20\text{ mm}$, $y_1 = 12\text{ mm}$)

B ($x_2 = -16\text{ mm}$, $y_2 = -14\text{ mm}$)

C ($x_3 = 25\text{ mm}$, $y_3 = -20\text{ mm}$)

Směr síly je dán směrovým úhlem α . Směrový úhel vynášíme od kladného směru osy x proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Působiště síly a směrový úhel určuje nositelku síly, což je přímka, na které leží vektor síly. Směrovým úhlem je v podstatě dán i kladný smysl síly.



Příklady vynášení směrového úhlu:

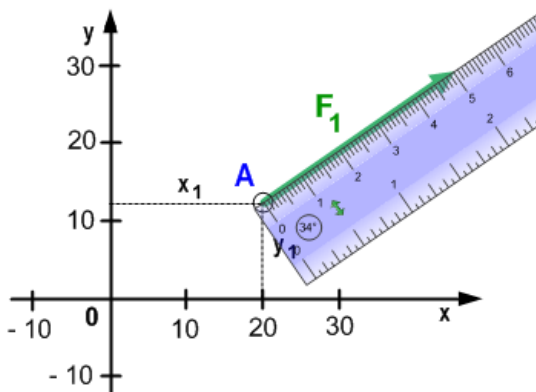
$\alpha_1 = 34^\circ$

$\alpha_2 = 120^\circ$

$\alpha_3 = 316^\circ$

URČENÍ SÍLY V ROVINĚ

Velikost síly nanášíme jako orientovanou úsečku na nositelku síly s počátkem v působišti síly. Smysl síly se označí šipkou na jejím konci. Délka úsečky, která představuje vektor síly, je dána velikostí síly a měřítkem sil. Měřítka sil může být zadáno např. $m_F: 100 \text{ N} \hat{=} 1 \text{ mm}$, nebo $m_F: 1000 \text{ N} \hat{=} 10 \text{ mm}$, nebo $m_F = 100 \text{ N/mm}$.



Příklad určení velikosti síly:

$$F_1 = 250 \text{ N}$$

$$m_F = 5 \text{ N/mm}$$

Jak pracovat s měřítky?

Pro lepší orientaci při určování měřítek sil, výpočtu délek vektorů sil, nebo výpočtu skutečných velikostí sil lze použít následující vztahy:

$$m_F = \frac{F}{l_F}$$

$$l_F = \frac{F}{m_F}$$

$$F = l_F \cdot m_F$$

Kde:

m_F - měřítko sil: např. 5 N/mm

l_F - délka nakresleného vektoru síly: např. 50 mm

F - velikost síly v N: např. 50 mm · 5 N/mm = 250 N

Stejně je možno pracovat se vztahem pro měřítko délek.

$$m_l = \frac{l}{l_l}$$

$$l_l = \frac{l}{m_l}$$

$$l = l_l \cdot m_l$$

Kde:

m_l - měřítko délek: např. 0,1 m/mm

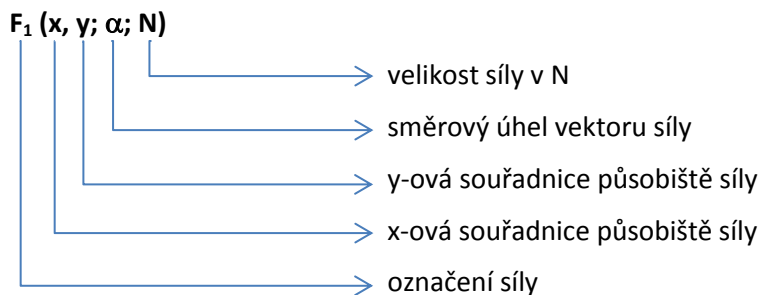
l_l - vzdálenost nakreslená v měřítku: např. 10 mm

l - vzdálenost ve skutečnosti: např. 10 mm · 0,1 m/mm = 1 m

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

URČENÍ SÍLY V ROVINĚ

Pro zápis vektoru síly užíváme obecně následující tvar:

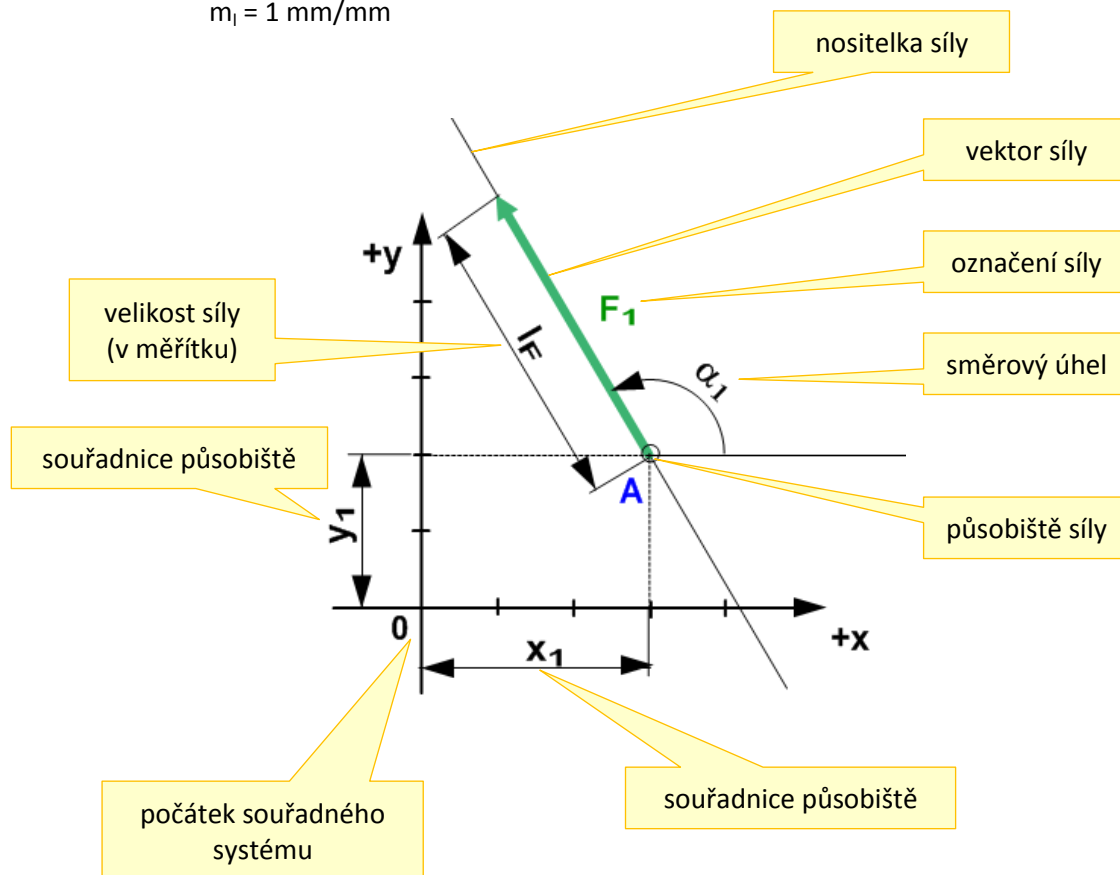


Příklad zakreslení síly v rovině s označením používaných pojmů:

$$F_1(30, 20; 120^\circ; 800 \text{ N})$$

$$m_F = 20 \text{ N/mm}$$

$$m_l = 1 \text{ mm/mm}$$



URČENÍ SÍLY V ROVINĚ

Příklad

Zadání:

Zakreslete v rovině souřadnic x, y následující síly. Potřebná měřítka vhodně zvolte.

Dáno: $F_1 (-20, 20; 138^\circ; 720 \text{ N})$

$F_2 (34, 22; 340^\circ; 480 \text{ N})$

$F_3 (50, -18; 226^\circ; 960 \text{ N})$

Řešení:

Souřadnice těžiště jsou zadány v milimetrech a podle jejich velikosti je předpoklad, že je bude možno nakreslit na papír formátu A4. Měřítka délek tedy není nutno určovat, respektive $m_l = 1 \text{ mm/mm}$. Vzdálenosti budeme vynášet v milimetrech. Měřítka sil zvolíme tak, abychom mohli síly nakreslit v rozumné velikosti. Např. $m_F = 20 \text{ N/mm}$. Délky vektorů jednotlivých sil pak můžeme určit pomocí vztahů:

$$l_{F1} = \frac{F_1}{m_F}$$

$$l_{F1} = \frac{720}{20}$$

$$l_{F1} = 36 \text{ mm}$$

$$l_{F2} = \frac{F_2}{m_F}$$

$$l_{F2} = \frac{480}{20}$$

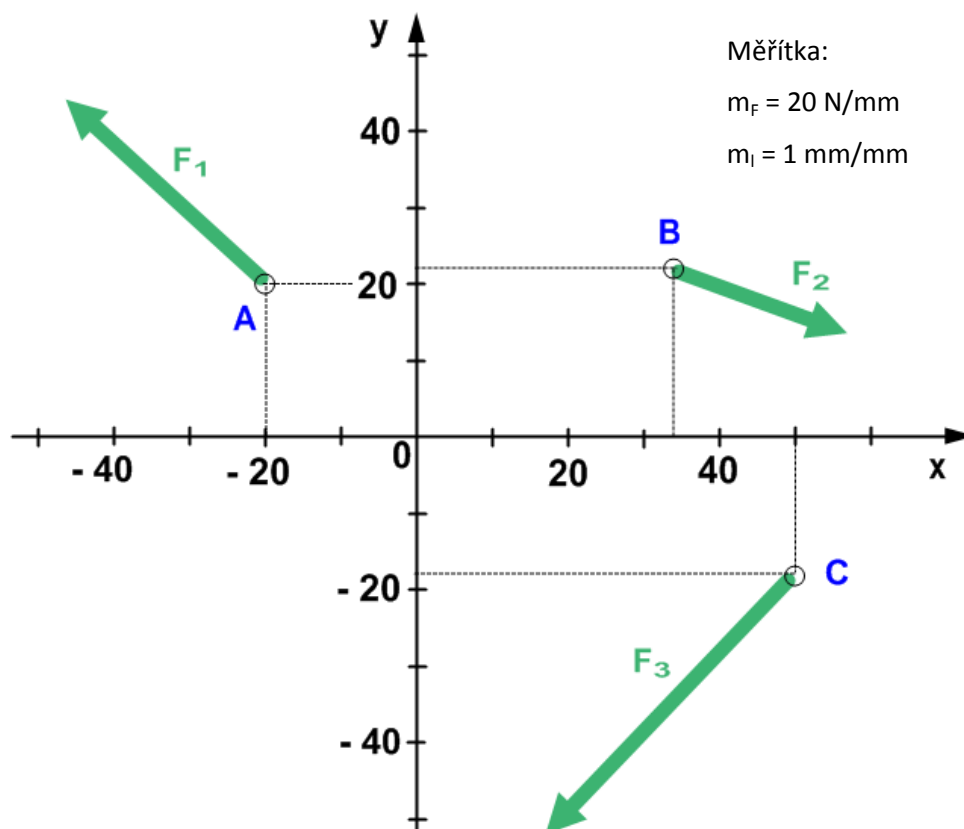
$$l_{F2} = 24 \text{ mm}$$

$$l_{F3} = \frac{F_3}{m_F}$$

$$l_{F3} = \frac{960}{20}$$

$$l_{F3} = 48 \text{ mm}$$

Požadovaný náčrt může vypadat následovně:



VÝSLEDNICE SIL

3 Výslednice sil

V praxi se obvykle setkáváme s případem, kdy na těleso působí více sil současně. Pak hovoříme o tzv. soustavě sil. Pro zjednodušení řešení bývá výhodné nahradit danou soustavu sil jedinou silou. Tato síla musí mít na těleso stejné účinky jako soustava sil, kterou nahrazuje. Podle toho, jak je soustava sil uspořádána, lze volit způsob grafického určení její výslednice. Může nastat několik základních případů rozmístění sil:

- vektory sil leží na jedné nositelce (výslednice těchto sil pak leží na stejné nositelce),
- vektory sil mají společné působíště (pak hovoříme o svazku sil a výslednice těchto sil bude mít stejné působíště jako skládané síly),
- vektory sil jsou rovnoběžné (společný průsečík nositelek leží v nekonečnu, polohu nositelky výslednice je nutno určit),
- vektory sil mají v rovině obecnou polohu (síly mají různá působíště, různé nositelky, různé směry a smysly, polohu nositelky výslednice nutno určit).

Pro každý z uvedených případů existují možnosti grafického řešení. Například pomocí silového rovnoběžníku, trojúhelníku sil, rozkladem sil do složek v osách x a y atd. S výhodou lze použít univerzální způsob skládání sil pomocí tzv. silového polygonu. Příklady použití silového polygonu jsou uvedeny v následujících kapitolách.

3.1 Síly na jedné nositelce

V tomto případě jsou vektory sil rozloženy na jedné přímce - nositelce. Prakticky se liší jen působíštěm, velikostí a smyslem. Sílu je možno po její nositelce posouvat bez změny jejích účinků. Této vlastnosti se využívá při určování velikosti výslednice takovéto soustavy sil.

Nejlépe pochopíme postup řešení na příkladu. Jednotlivé kroky postupu jsou očíslovány a popis probíhající činnosti je vyznačen modrou barvou textu.

Příklad

Zadání:

Určete graficky velikost výslednice těchto sil:

$$F_1 (10, 0; 0^\circ; 100 \text{ N})$$

$$F_2 (28, 0; 0^\circ; 240 \text{ N})$$

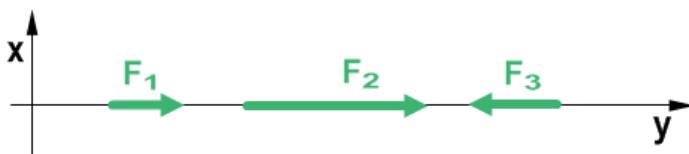
$$F_3 (70, 0; 180^\circ; 120 \text{ N})$$

Ze zadání je zřejmé, že síly leží na jedné přímce (souřadnice y je u všech působíšť stejná). Mají tedy společnou nositelku. V našem případě je nositelka sil totožná s osou x .

VÝSLEDNICE SIL

Postup řešení:

- 1 Nakreslíme podle zadání náčrt rozložení sil na nositelce.



- 2 Zvolíme vhodné měřítko sil a případně i měřítko délek.

$$m_F = 10 \text{ N/mm}$$

$$m_l = 1 \text{ mm/mm}$$

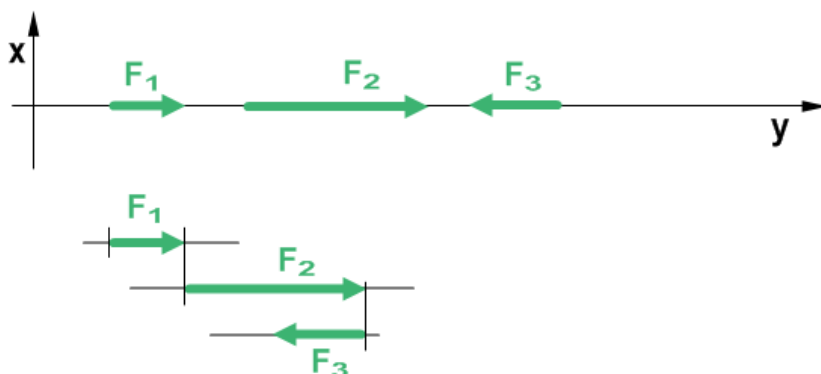
- 3 Pro grafické řešení vypočítáme příslušné délky vektorů jednotlivých sil.

$$l_{F1} = 10 \text{ mm}$$

$$l_{F2} = 24 \text{ mm}$$

$$l_{F3} = 12 \text{ mm}$$

- 4 Skládáme vektory sil v měřítku za sebe tak, že počátek následující síly vždy leží v koncovém bodě síly předchozí. Tomuto obrazci budeme říkat silový polygon. V našem případě leží síly na jedné přímce. Výsledný obrazec by byl po nakreslení nepřehledný. Jednotlivé vektory sil proto vždy odsadíme na rovnoběžky s původní nositelkou.

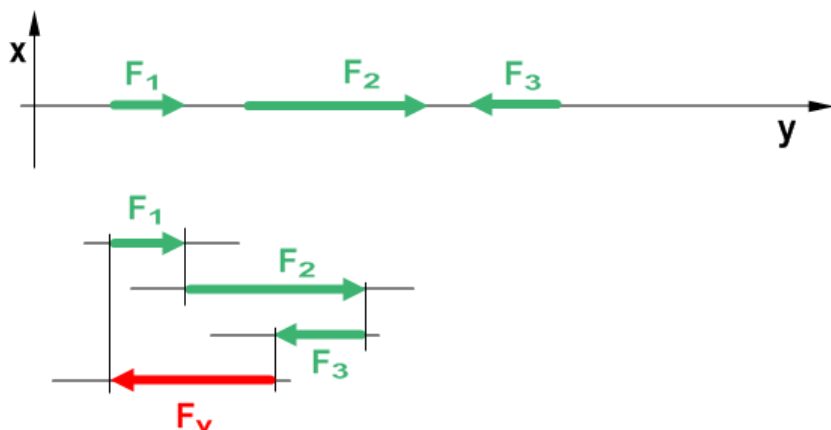


Měřítka:

$$m_F = 10 \text{ N/mm}$$

$$m_l = 1 \text{ mm/mm}$$

- 5 Po zakreslení všech sil určíme velikost výslednice. Vektor výslednice F_v je rovnoběžný se skládanými silami a vede od konce poslední síly k počátku první síly v polygonu.



Měřítka:

$$m_F = 10 \text{ N/mm}$$

$$m_l = 1 \text{ mm/mm}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VÝSLEDNICE SIL

- 6 Změříme délku vektoru výslednice. Po přepočtu přes měřítko zjistíme velikost výslednice.

$$l_{F_v} = 22 \text{ mm}$$

$$F_v = 220 \text{ N}$$

- 7 Výslednice leží na stejné nositelce jako síly, které ji tvoří.



Měřítko:

$$m_F = 10 \text{ N/mm}$$

$$m_l = 1 \text{ mm/mm}$$

- 8 Zapišeme výsledek úkolu ve tvaru, v jakém bylo zadání. X-ovou souřadnici výslednice nebudeme zjišťovat, protože sílu, tedy i výslednici, je možno po nositelce libovolně posouvat bez změny jejích účinků.

$$F_v (?; 0; 180^\circ; 220 \text{ N})$$

Další řešený příklad je uveden v prezentaci: [skládání_spol_nositelka.ppsx](#)

Příklady k řešení:

- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (10, 20; 180^\circ; 320 \text{ N})$, $F_2 (30, 20; 0^\circ; 560 \text{ N})$, $F_3 (50, 20; 0^\circ; 430 \text{ N})$, $F_4 (18, 20; 180^\circ; 260 \text{ N})$, $F_5 (42, 20; 0^\circ; 120 \text{ N})$.
 $F_v (?; 20; 0^\circ; 530 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (20, 20; 90^\circ; 5,2 \text{ N})$, $F_2 (20, -20; 90^\circ; 1,6 \text{ N})$, $F_3 (20, 35; 90^\circ; 2,3 \text{ N})$, $F_4 (20, 0; 270^\circ; 7,6 \text{ N})$, $F_5 (42, 5; 90^\circ; 1,2 \text{ N})$.
 $F_v (20, ?; 90^\circ; 2,7 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (0, 0; 40^\circ; 6620 \text{ N})$, $F_2 (12, 10; 40^\circ; 3580 \text{ N})$, $F_3 (31, 26; 220^\circ; 4830 \text{ N})$, $F_4 (-25, -21; 40^\circ; 1850 \text{ N})$.
 $F_v (?; ?; 40^\circ; 7220 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (10, 20; 180^\circ; 32 \text{ N})$, $F_2 (30, 20; 0^\circ; 56 \text{ N})$, $F_3 (50, 20; 0^\circ; -43 \text{ N})$,
 $F_v (?; 20; 180^\circ; 19 \text{ N})$

VÝSLEDNICE SIL

3.2 Síly se společným působištěm – svazek sil

Postup grafického řešení výslednice svazku sil je vysvětlen opět na řešeném příkladu.

Příklad

Zadání:

Určete graficky výslednici následujících sil.

$$F_1 (0, 0 ; 95^\circ ; 325 \text{ N})$$

$$F_2 (0, 0 ; 18^\circ ; 310 \text{ N})$$

$$F_3 (0, 0 ; 257^\circ ; 205 \text{ N})$$

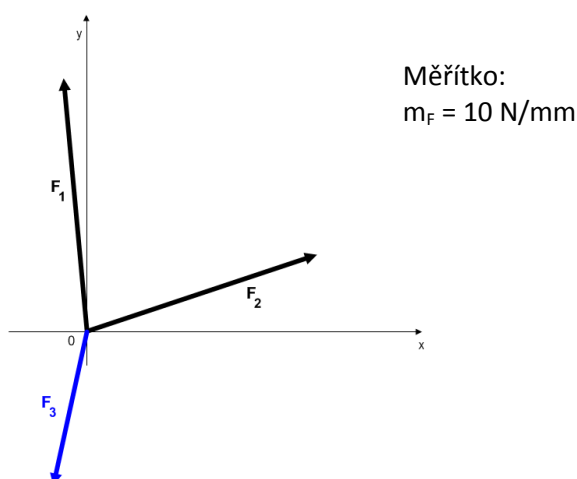
Ze zadání je zřejmé, že síly mají společné působiště. Toto působiště je v našem případě totožné s počátkem souřadného systému.

Postup řešení:

- 1 Zvolíme vhodné měřítko sil. Měřítko délek není potřeba určovat, protože síly působí v jednom bodě.

$$m_F = 10 \text{ N/mm}$$

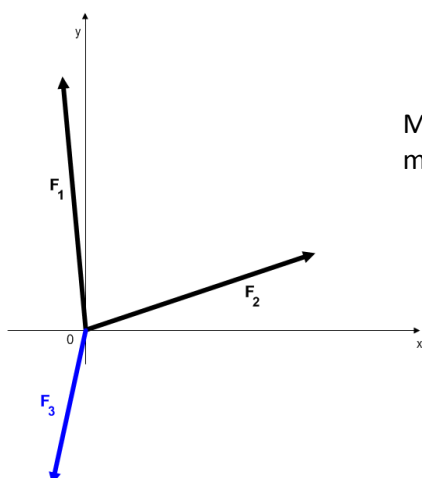
- 2 Nakreslíme podle zadání obrazec rozložení sil v rovině.



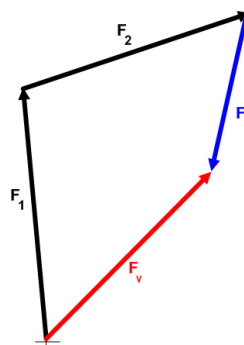
- 3 Zvolíme libovolný bod jako počátek silového polygonu a skládáme síly známým způsobem tak, že počátek vektoru následující síly vždy umístíme na konec vektoru síly předchozí. Zachováváme velikost a směr vektorů jednotlivých sil. Přenášíme tedy vektory sil jako rovnoběžky se silami nakreslenými v obrazci rozložení sil v rovině. Velikost a směr vektoru výslednice sil je dán spojnicí počátku silového polygonu (tedy počátku síly F_1) a konce poslední síly (v našem případě koncem síly F_3).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

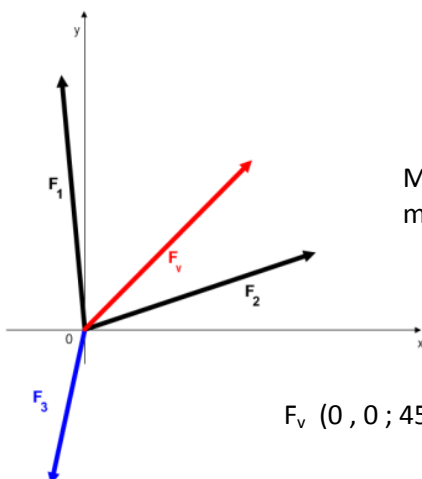
VÝSLEDNICE SIL



Měřítko:
 $m_F = 10 \text{ N/mm}$

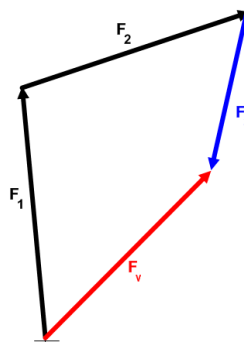


- 4 Působíště výslednice je totožné s působíštěm svazku sil, který výslednice nahrazuje. Přeneseme tedy vektor výslednice zpět do obrazce rozložení sil v rovině. Odměříme délku vektoru výslednice, přepočteme přes měřítko, odměříme směrový úhel výslednice a zapíšeme výsledek.



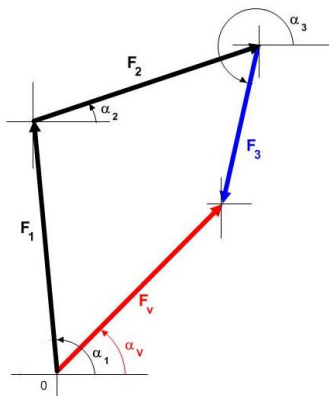
Měřítko:
 $m_F = 10 \text{ N/mm}$

$F_v (0, 0 ; 45^\circ; 311 \text{ N})$



Poznámka:

Po nabytí jistých zkušeností s řešením takovéto soustavy sil můžeme pro urychlení celého postupu vynechat kreslení obrazce rozložení sil v rovině a přímo skládat silový polygon tak, jak je zřejmé z následujícího obrázku.



Měřítko:
 $m_F = 10 \text{ N/mm}$

$F_v (0, 0 ; 45^\circ; 311 \text{ N})$

VÝSLEDNICE SIL

Příklady k řešení:

- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (10, 10; 45^\circ; 600 \text{ N})$, $F_2 (10, 10; 120^\circ; 300 \text{ N})$, $F_3 (10, 10; 210^\circ; 650 \text{ N})$, $F_4 (10, 10; 270^\circ; 550 \text{ N})$.
 $F_v (10, 10; 213,5^\circ; 346 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (0, 0; 15^\circ; 2500 \text{ N})$, $F_2 (0, 0; 55^\circ; 1600 \text{ N})$, $F_3 (0, 0; 310^\circ; 1200 \text{ N})$, $F_4 (0, 0; 166^\circ; 1550 \text{ N})$.
 $F_v (0, 0; 29^\circ; 2960 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (0, 0; 90^\circ; 0,54 \text{ N})$, $F_2 (0, 0; 167^\circ; 0,92 \text{ N})$, $F_3 (0, 0; 234^\circ; 0,25 \text{ N})$, $F_4 (0, 0; 60^\circ; 1,2 \text{ N})$.
 $F_v (0, 0; 106^\circ; 1,6 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (-10, -10; 275^\circ; 8590 \text{ N})$, $F_2 (-10, -10; 48^\circ; 6430 \text{ N})$, $F_3 (-10, -10; 126^\circ; 3820 \text{ N})$,
 $F_v (-10, -10; 346^\circ; 2889 \text{ N})$
- Určete graficky velikost výslednice následujících sil:
 $F_1 (0, 0; 180^\circ; 25 \text{ N})$, $F_2 (0, 0; 312^\circ; 54 \text{ N})$, $F_3 (0, 0; 65^\circ; 38 \text{ N})$, $F_4 (0, 0; 155^\circ; 42 \text{ N})$.
 $F_v (0, 0; 132^\circ; 16 \text{ N})$

3.3 Soustava rovnoběžných sil

Při řešení výslednice soustavy rovnoběžných sil využíváme tzv. vláknového obrazce. V podstatě se jedná opět o aplikaci skládání, rozkládání a rovnováhy sil. Vysvětlení teoretického principu vláknového obrazce není předmětem této cvičebnice.

Rozmístění sil v rovině není v následujícím řešeném příkladu zadáno podle dosavadních zvyklostí, ale je určeno zakótováním polohy sil v obrázku a určením směru a smyslu sil pomocí šipek. Tento způsob je v technické praxi častější a obvyklejší. I v dalších příkladech budeme proto tento způsob zadávání silových soustav používat.

Příklad řešení velikosti a polohy výslednice soustavy rovnoběžných sil je uveden v prezentaci: [skládání rovnoběžné síly.ppsx](#)

VÝSLEDNICE SIL

Příklady k řešení:

Zadání 1:

Určete graficky velikost a polohu výslednice rovnoběžných sil zadaných dle obrázku. Polohu výslednice určete vzhledem k bodu A.

$$F_1 = 400 \text{ N}$$

$$F_2 = 600 \text{ N}$$

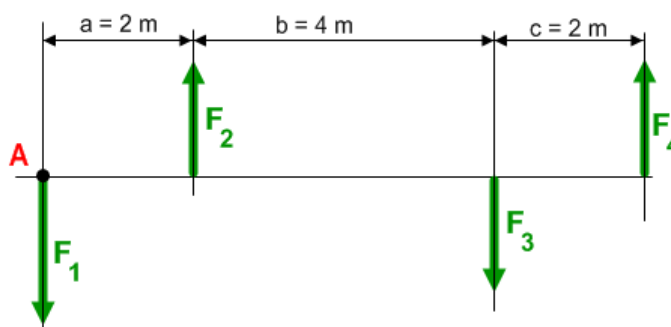
$$F_3 = 800 \text{ N}$$

$$F_4 = 200 \text{ N}$$

$$F_v = 400 \text{ N}$$

$$\alpha_v = 270^\circ$$

$$r_v = 5 \text{ m}$$



Zadání 2:

Určete graficky velikost a polohu výslednice rovnoběžných sil zadaných dle obrázku. Polohu výslednice určete vzhledem k bodu A.

$$F_1 = 300 \text{ N}$$

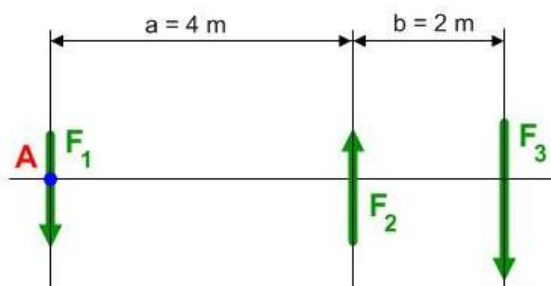
$$F_2 = 500 \text{ N}$$

$$F_3 = 300 \text{ N}$$

$$F_v = 100 \text{ N}$$

$$\alpha_v = 270^\circ$$

$$r_v = 2 \text{ m (nositelka výslednice leží vlevo od bodu A)}$$



Zadání 3:

Určete graficky velikost a polohu výslednice rovnoběžných sil zadaných dle obrázku. Polohu výslednice určete vzhledem k bodu A.

$$F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$F_2 = 15 \text{ kN}$$

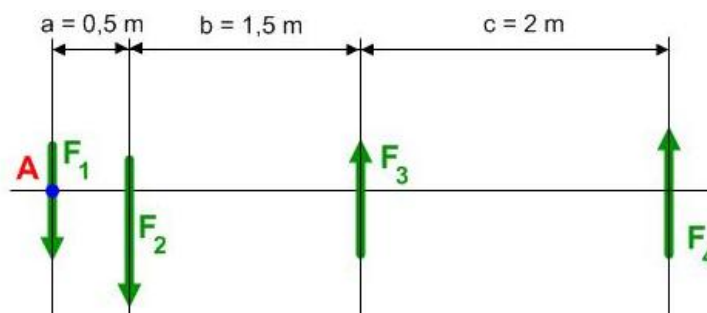
$$F_3 = 8 \text{ kN}$$

$$F_4 = 30 \text{ kN}$$

$$F_v = 18 \text{ kN}$$

$$\alpha_v = 90^\circ$$

$$r_v = 7,1 \text{ m}$$



VÝSLEDNICE SIL

3.4 Obecná soustava sil

Princip řešení libovolného rozložení sil v rovině je v podstatě stejný jako v případě soustavy rovnoběžných sil. Opět se určuje velikost a směr výslednice pomocí silového polygonu. Poloha nositelky výslednice se určí opět na základě využití vláknového obrazce.

Odlišnosti jsou pouze v tom, že silový polygon je dán směrovými úhly nositelek sil – síly při skládání neleží na jedné přímce (podobně jako při řešení svazku sil). Působíště výslednice neurčujeme. Určujeme pouze kolmou vzdálenost (v příkladech označena jako r_v) nositelky výslednice od zadaného bodu. Tím může být například počátek souřadnic, nebo jiný zadaný bod.

Všechny další zásady a postupy uvedené při řešení výslednice soustavy rovnoběžných sil platí i při řešení obecné soustavy sil.

VÝSLEDNICE SIL

Příklad

Zadání:

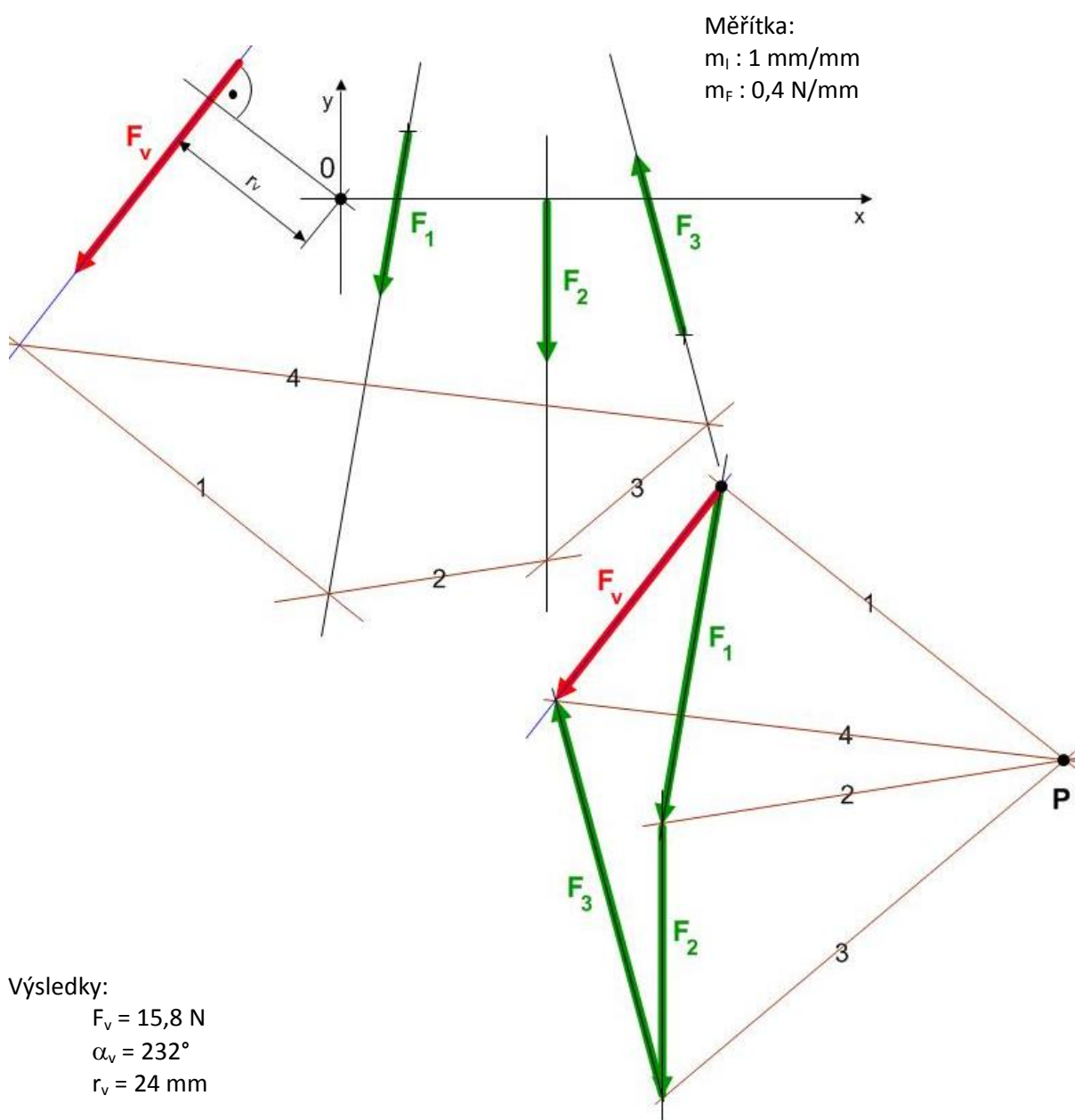
Určete graficky velikost a polohu výslednice daných různoběžných sil. Polohu výslednice určete vzhledem k počátku souřadného systému.

$$F_1 (10, 10; 260^\circ; 20 \text{ N})$$

$$F_2 (30, 0; 270^\circ; 16 \text{ N})$$

$$F_3 (50, -20; 105^\circ; 24 \text{ N})$$

Řešení:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VÝSLEDNICE SIL

Příklad

Zadání:

Určete graficky velikost a polohu výslednice sil zadaných dle obrázku. Délkové rozměry jsou uvedeny v milimetrech. Polohu výslednice určete vzhledem k počátku souřadného systému.

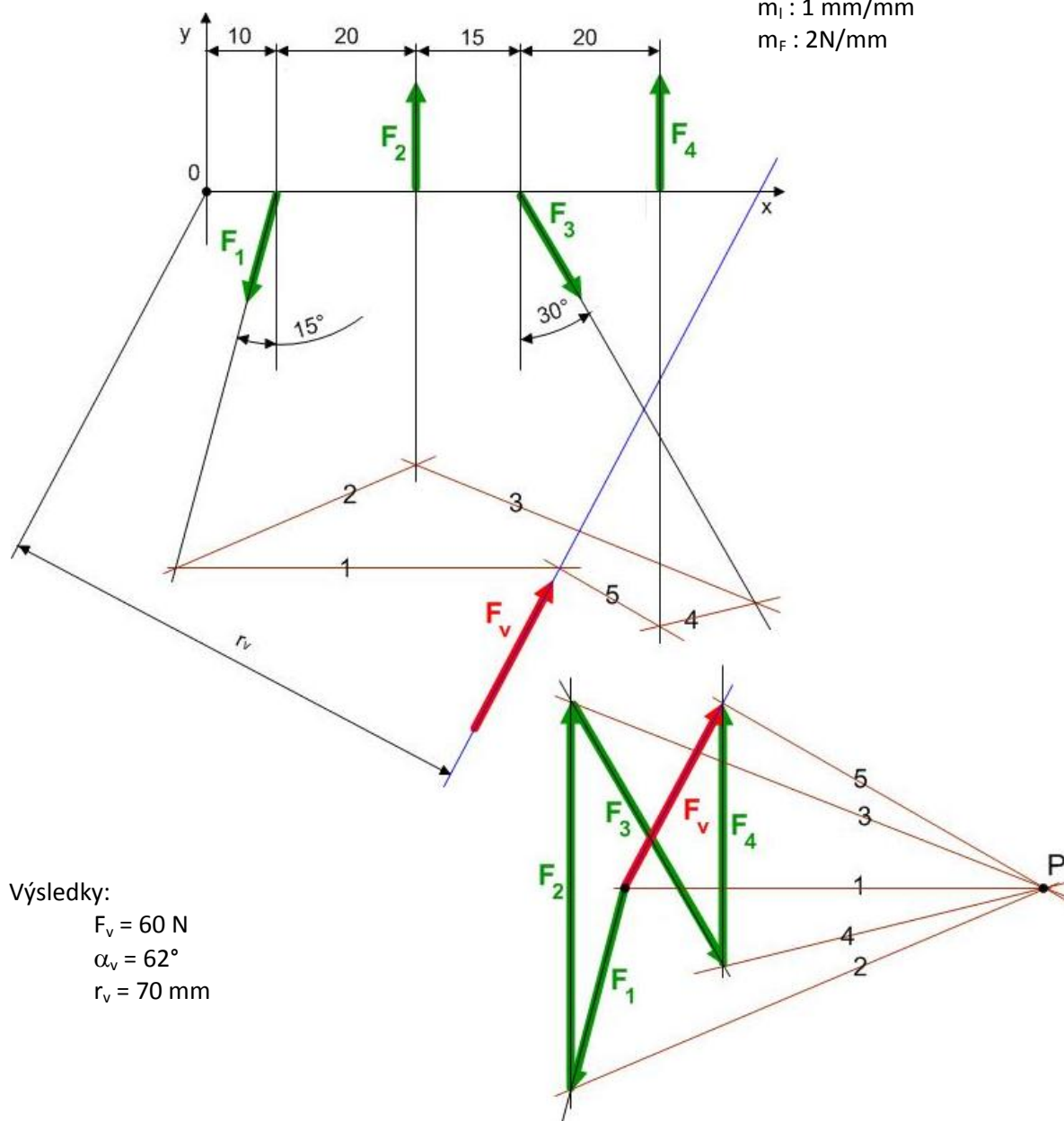
$$\begin{aligned} F_1 &= 60 \text{ N} \\ F_2 &= 112 \text{ N} \\ F_3 &= 88 \text{ N} \\ F_4 &= 76 \text{ N} \end{aligned}$$

Řešení:

Měřítko:

$m_l : 1 \text{ mm/mm}$

$m_F : 2 \text{ N/mm}$



Výsledky:

$$\begin{aligned} F_v &= 60 \text{ N} \\ \alpha_v &= 62^\circ \\ r_v &= 70 \text{ mm} \end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VÝSLEDNICE SIL

Příklady k řešení:

Zadání 1:

Určete graficky velikost a polohu výslednice různoběžných sil zadaných dle obrázku. Polohu výslednice určete vzhledem k bodu A. Délkové rozměry jsou udány v milimetrech.

$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$F_2 = 400 \text{ N}$$

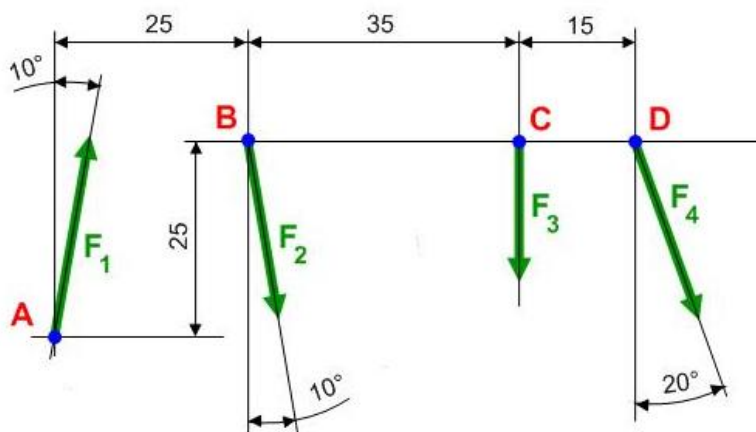
$$F_3 = 300 \text{ N}$$

$$F_4 = 350 \text{ N}$$

$$F_v = 598 \text{ N}$$

$$\alpha_v = 298^\circ$$

$$r_v = 96 \text{ mm}$$



PRUTOVÁ SOUSTAVA

4 Prutová soustava

Prutové soustavy (konstrukce) jsou konstrukce složené z prutů (tyčí), které jsou vzájemně spojeny ve styčných bodech (styčnicích). Můžeme se s nimi setkat v konstrukci mostů, jeřábů, střech apod.

Pruty jsou obvykle tyče z válcovaných kovových profilů L, T, U, nebo trubky či jiné duté profily.

Styčníky jsou obvykle tvořeny styčnickovými plechy, ke kterým jsou pruty přinýtovány nebo přivařeny.

Osová síla v prutu je síla, která působící v podélné ose prutu.

Předpoklady pro řešení prutových konstrukcí:

- Pruty jsou ve styčnicích spojeny kloubově (přenášejí pouze osově síly).
- Vnější zatěžující síly mohou působit pouze ve styčnicích.
- Prutová soustava je dokonale tuhá, tedy staticky určitá. U staticky určité soustavy musí platit vztah:

$$2 \cdot s - p = 3$$

kde: s - počet styčníků v prutové soustavě

p - počet prutů v prutové soustavě.

Cílem řešení prutových konstrukcí je určit:

- Jak jsou jednotlivé pruty namáhány (tahem či tlakem).
- Jak velkou silou.
- Později dimenzovat nebo kontrolovat pevnost prutů a styčníků.

Způsoby řešení prutových konstrukcí:

- Početně
 - Metoda styčnicková
 - Metoda průsečná (Ritterova)
- Graficky
 - Postupným řešením rovnováhy v jednotlivých styčnicích
 - Celkovým obrazcem podle Cremona

Podstatou grafického řešení je to, že všechny síly působící v daném styčnicku musí být v rovnováze. To znamená, že výslednice všech sil, které ve styčnicku působí, je rovna nule. Z předchozích příkladů víme, že síly, které jsou v rovnováze, tvoří po grafickém složení (součtu) uzavřený mnohoúhelník (polygon). Této vlastnosti se využívá i při grafickém zjišťování velikosti osových sil v jednotlivých prutech prutové soustavy

Postup grafického určení osových sil v prutech postupným řešením styčníků je uveden v následujícím řešeném příkladu.

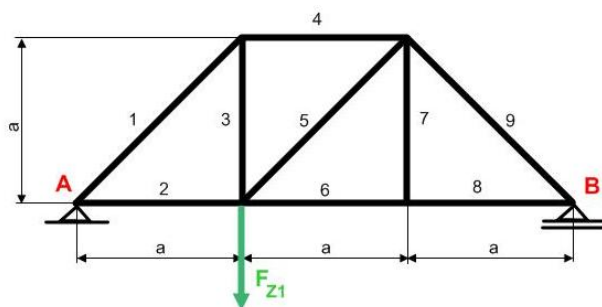
Některé informativní obrázky (odlišeny rámečkem) nejsou kresleny z důvodu úspory místa v uváděném měřítku.

PRUTOVÁ SOUSTAVA

Zadání:

Řešte graficky velikosti reakcí v podporách a velikosti osových sil v jednotlivých prutech prutové soustavy dle obrázku.

Dáno: $F_{Z1} = 470 \text{ N}$
 $a = 3,1 \text{ m}$.



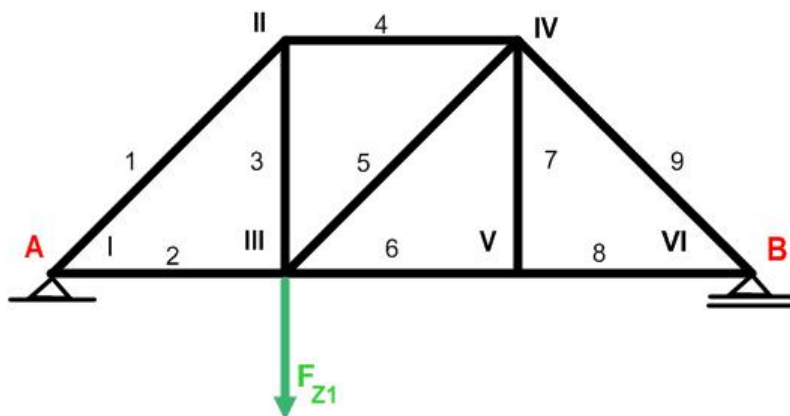
Postup řešení:

- 1 Zkontrolujeme, zda je soustava staticky určitá a tedy řešitelná.

$$2 \cdot s - p = 3$$

$$2 \cdot 6 - 9 = 3 \quad \rightarrow \quad \text{soustava je staticky určitá a řešitelná}$$

- 2 Nakreslíme ve vhodném měřítku zadanou prutovou soustavu s vyznačením působících zátěžných sil. Síly zatím nemusí být kresleny v měřítku. Jednotlivé pruty označíme např. arabskými čísly a jednotlivé styčníky např. římskými čísly.



Měřítko:

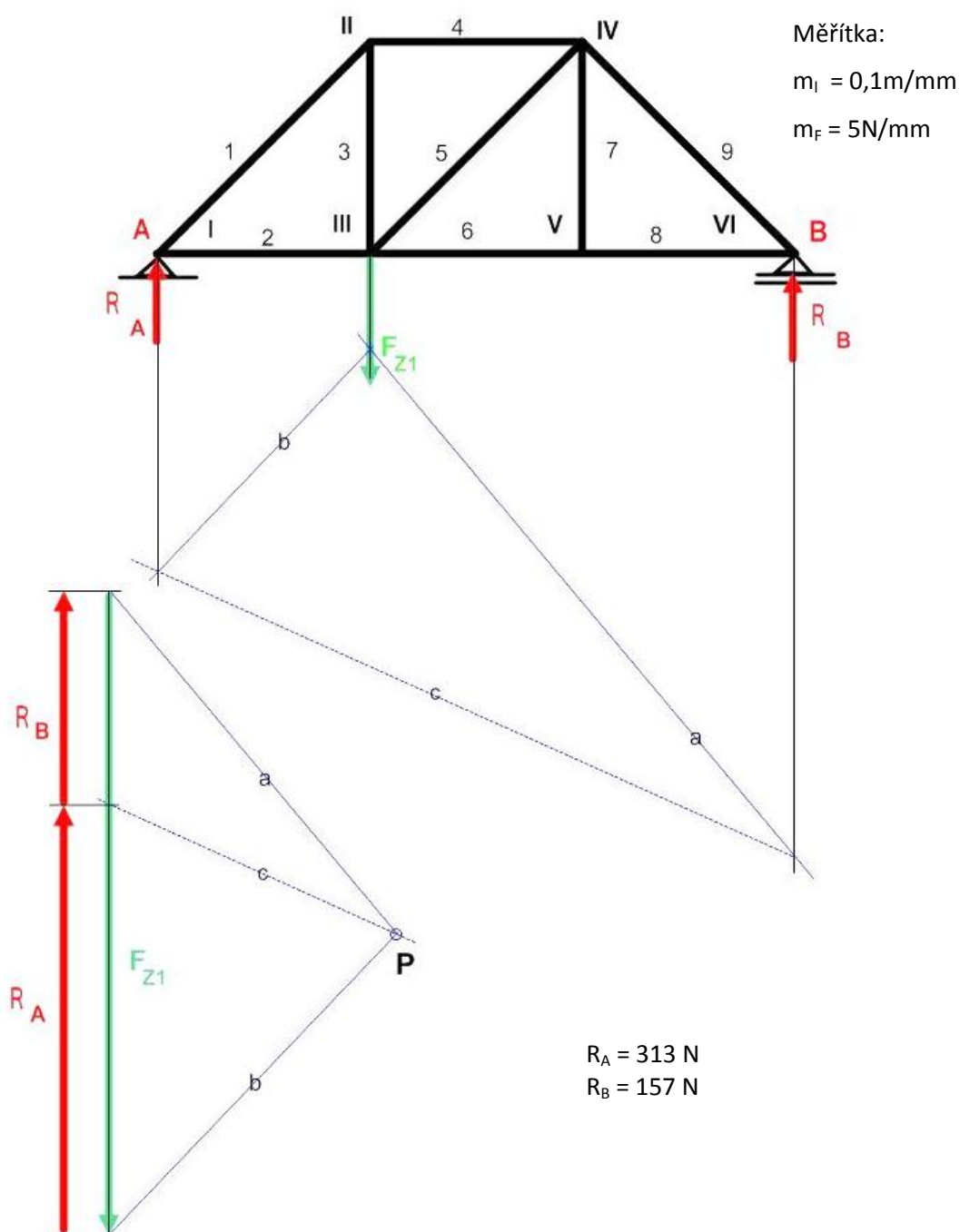
$$m_l = 0,1 \text{ m/mm}$$

$$m_F = 5 \text{ N/mm}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

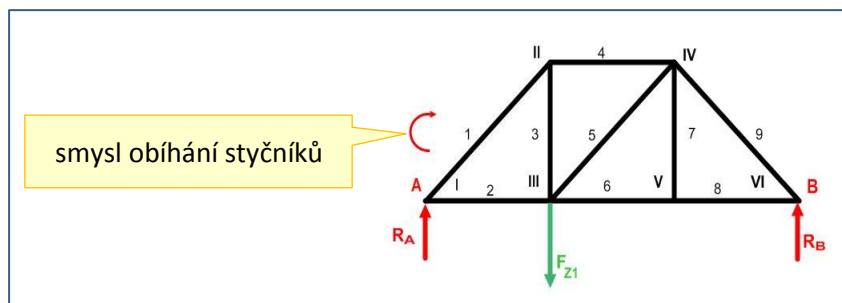
PRUTOVÁ SOUSTAVA

- 3 Pro zjištění velikostí reakcí v podporách A a B využijeme stejný postup jako při grafickém řešení reakcí nosníku. Délky vektorů reakcí přepočítáme přes měřítko a zapíšeme výsledek k řešení.



PRUTOVÁ SOUSTAVA

- 4 Zvolíme smysl obíhání styčnicku. Tím určíme pořadí, podle kterého budeme na sebe navazovat síly působící v daném styčnicku při jejich skládání do silového polygonu. Stejný smysl obíhání musíme dodržet u všech styčnicků.



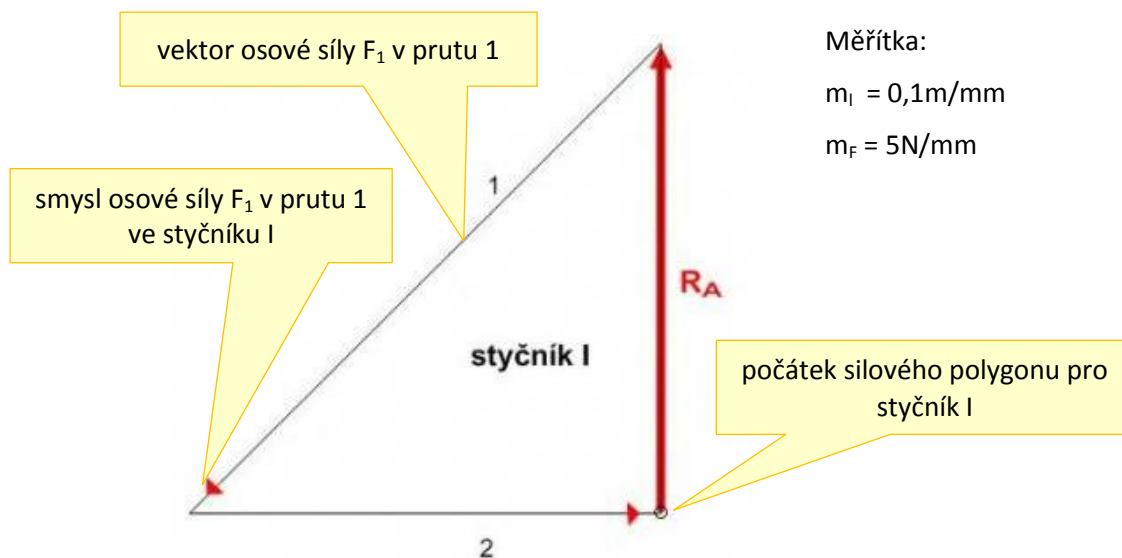
- 5 Můžeme řešit jen ty styčnický, které mají neznámé osově síly pouze ve dvou prutech.
- 6 Podle zvoleného směru obíhání skládáme síly působící v daném styčnicku tak, aby neznámé síly v prutech zůstaly nakonec. Začneme například styčnickem I. Pro styčnick I platí:
- Ve styčnicku působí síly v prutech 1 a 2 (označíme je F_1 a F_2) a reakce R_A .
 - Podle zvoleného směru obíhání budeme síly skládat v pořadí $R_A - F_1 - F_2$.
 - Nakreslíme na vhodné místo v měřítku sil vektor reakce R_A (počátek této první síly a tím i počátek celého silového polygonu je v příkladu označen kroužkem).
 - Při skládání silového polygonu bychom na konec této první síly připojili počátek vektoru následující síly. Podle smyslu obíhání tedy síly F_1 v prutu 1. Známe však pouze směr této síly - ten je rovnoběžný s osou prutu 1. Koncem vektoru reakce R_A vedeme tedy rovnoběžku s prutem 1. Prut 1 je nakreslen v měřítku v obrázku celé prutové soustavy.
 - Víme, že poslední síla v polygonu, v našem případě síla F_2 v prutu 2, musí polygon uzavřít. Musí tedy končit v počátku vektoru reakce R_A , čili v počátku polygonu, který je označen kroužkem. Počátkem vektoru R_A vedeme proto rovnoběžku s prutem 2.
 - Průsečík těchto dvou přímek určuje délky vektorů sil F_1 a F_2 .
 - Silový polygon musí být uzavřen, vektory sil na sebe musí navazovat. Šipky vektorů sil v nakresleném polygonu pro styčnick I musí navazovat v jednom směru. V našem případě je tento směr dán vektorem první síly v polygonu, tedy vektorem reakce R_A , který známe z grafického řešení reakcí. Tím je určen i smysl sil F_1 a F_2 ve styčnicku I a můžeme šipky zakreslit na čáry polygonu představující vektory sil F_1 a F_2 .

Poznámka:

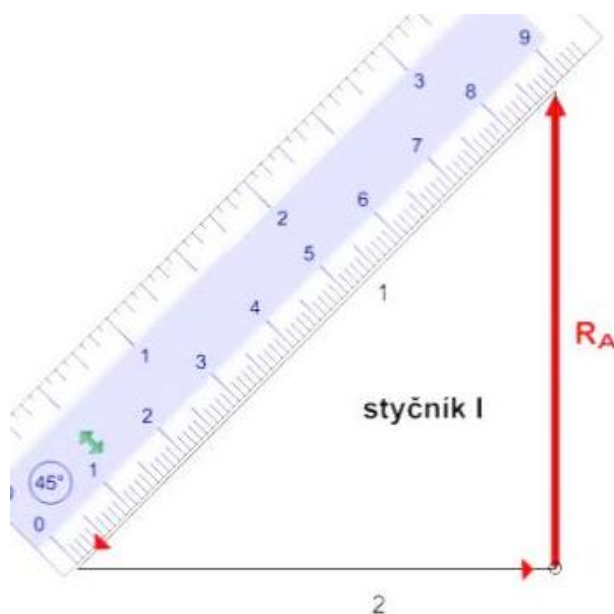
Z důvodu přesnějšího odměřování jsou vektory sil v prutech kresleny tenkou čarou a modifikovaná šipka označující smysl vektoru síly není umístěna na konci, ale vždy kousek před koncem daného vektoru. Vektory osových sil nejsou v polygonech označeny jako síly (např. F_1 , nebo F_2), ale pouze číslem prutu, tedy např. 1, nebo 2.

PRUTOVÁ SOUSTAVA

7 Řešení silového polygonu pro styčník I vypadá takto:



8 Změříme délky vektorů sil F_1 a F_2 , přepočítáme přes měřítko na velikost sil v newtonech a zapíšeme do tabulky.



$$F_1 = l_{F1} \cdot m_F$$

$$F_1 = 88,6 \cdot 5$$

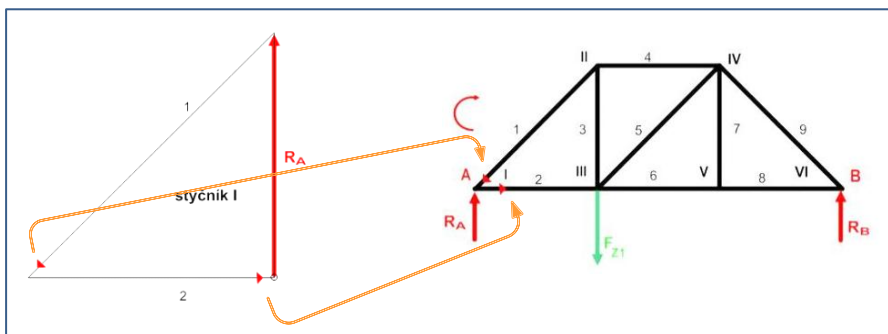
$$F_1 = 443 \text{ N}$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla	443 N	313 N							

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

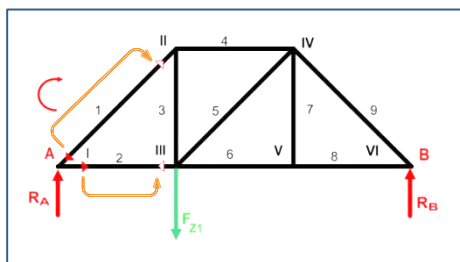
PRUTOVÁ SOUSTAVA

- 9 Přeneseme šipky smyslu vektorů osových sil z polygonu pro styčník I do tohoto styčníku na obrázku prutové soustavy. Pokud šipka vektoru síly směřuje do styčníku, působí v daném prutu tlak (označujeme znaménkem -). Pokud šipka vektoru síly v prutu směřuje od styčníku, bude v daném prutu působit tahová síla (označujeme znaménkem +). Doplňme znaménka pro tah nebo tlak k velikostem sil zapsaným v tabulce.



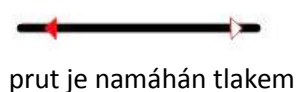
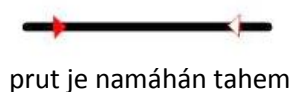
Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla	- 443 N	+ 313 N							

- 10 Šipky označující tah nebo tlak v prutech u styčníku I přeneseme na opačné konce prutů. Pokud jsme v prutu 1 ve styčníku I určili tlakovou sílu, bude tlak působit i na opačném konci prutu 1, ve styčníku II – šipka bude tedy opět směřovat do styčníku, v tomto případě do styčníku II. Prut 1 bude namáhán tlakem. Pokud jsme v prutu 2 ve styčníku I určili tahovou sílu, bude tah i na opačném konci prutu 2, ve styčníku III. Šipka smyslu síly směřuje ze styčníku III. Prut 2 je namáhán tahem. V příkladu jsou přenášeny šipky pro lepší orientaci vždy kresleny jako prázdné.



Poznámka:

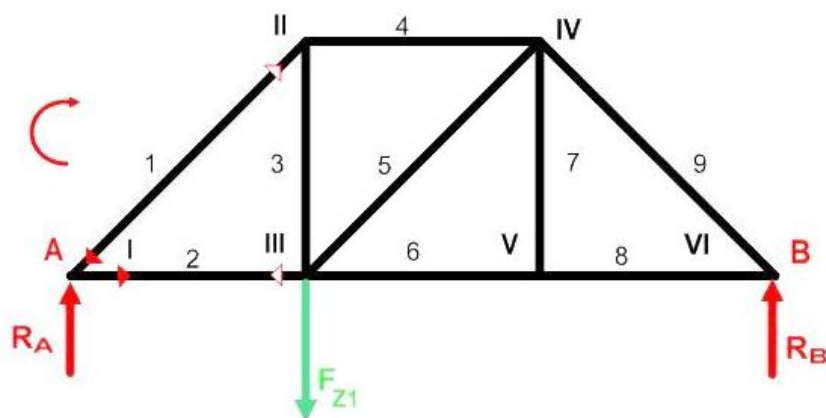
Mohou nastat pouze dva případy zatížení prutu:



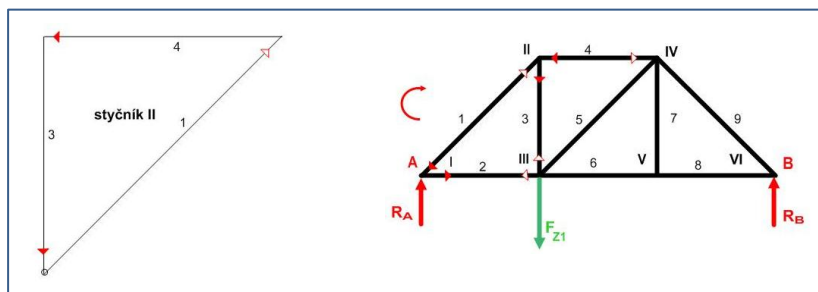
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUTOVÁ SOUSTAVA

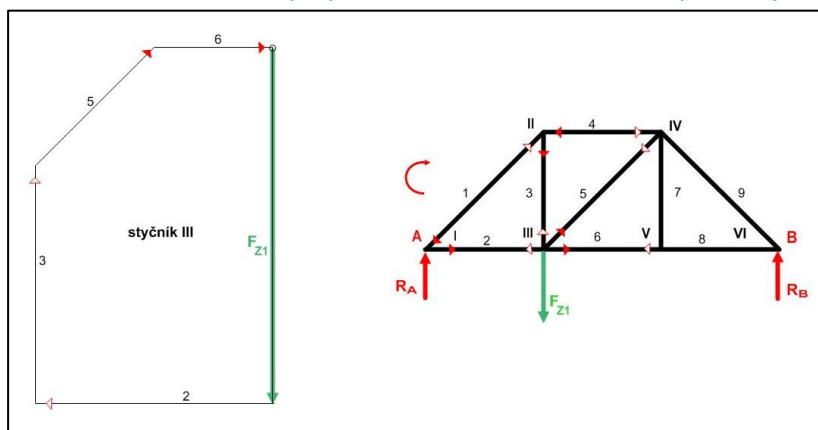
Obrázek prutové soustavy po přenesení šipek bude nyní vypadat takto:



- 11 Můžeme řešit osově síly v prutech u dalšího styčnicku. Musíme opět zvolit takový styčník, ve kterém jsou neznámé síly jen ve dvou prutech. V našem případě tomu odpovídá styčník II, protože neznáme síly pouze v prutech 3 a 4. Velikost i smysl síly F_1 v prutu 1 u styčnicku II jsme již vyřešili (bod 10). Pro styčník II zopakujeme postup uvedený v bodech 6 až 10. Podle zvoleného smyslu obíhání styčnicku budeme skládat síly v pořadí $F_1 - F_4 - F_3$. Silový polygon pro styčník II, směry sil a přenesení šipek do obrázku prutové soustavy je uvedeno zde:



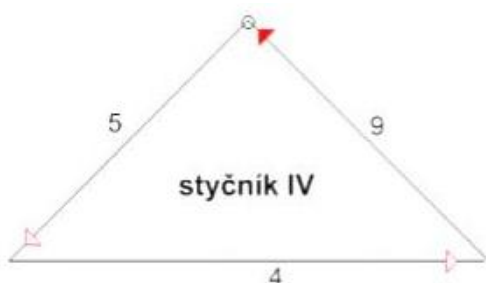
- 12 Podobně pokračujeme při řešení sil v prutech ve styčnicku III. Podle smluveného smyslu obíhání budeme skládat síly v pořadí $F_{z1} - F_2 - F_3 - F_5 - F_6$. Výsledek je uveden zde:



PRUTOVÁ SOUSTAVA

13 Pokračovat můžeme kterýmkoli dalším styčником. Ve všech už jsou neznámé osově síly pouze ve dvou prutech. Při řešení styčnicku IV nebo V zjistíme, že v případě přesného kreslení nelze polygony sil uzavřít jinak než za podmínky, že osová síla v prutu 7 je rovna nule. (Při řešení polygonu pro styčnick IV směřuje rovnoběžka s prutem 9, vedená koncem vektoru síly F_4 , přímo do počátku polygonu. Délka vektoru síly F_7 tedy musí být nulová. Při řešení styčnicku V se nemohu vrátit do počátečního bodu polygonu jinak než tak, že vektor síly F_7 , kolmý na obě další síly v polygonu, bude mít nulovou velikost). Polygony pro tyto styčnický jsou uvedeny zde:

pořadí skládání sil $F_5 - F_4 - F_9 - F_7$



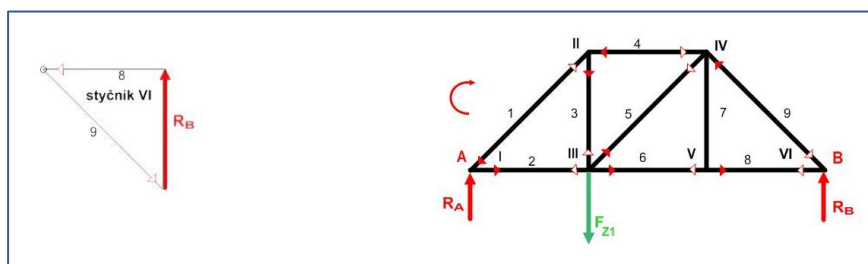
pořadí skládání sil $F_6 - F_7 - F_8$



Poznámka:

Nulové osově síly bývají v prutech, které jsou uchyceny ve styčnicích tvaru T, ve kterých současně nepůsobí žádná vnější zatěžující síla F_z , nebo reakce R.

14 Nyní už známe osově síly ve všech prutech soustavy. Pro kontrolu můžeme sestavit silový polygon pro styčnick VI. Pořadí sil podle smyslu obíhání např.: $F_9 - R_B - F_8$, nebo $R_B - F_8 - F_9$, nebo $F_8 - F_9 - R_B$. Silový polygon musí vyjít vždy uzavřený.



15 Velikosti všech osových sil v prutech řešené soustavy seřadíme do přehledné tabulky:

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla	- 443 N	+ 313 N	+ 313 N	- 313 N	+ 222 N	+ 157 N	0 N	+ 157 N	- 222 N

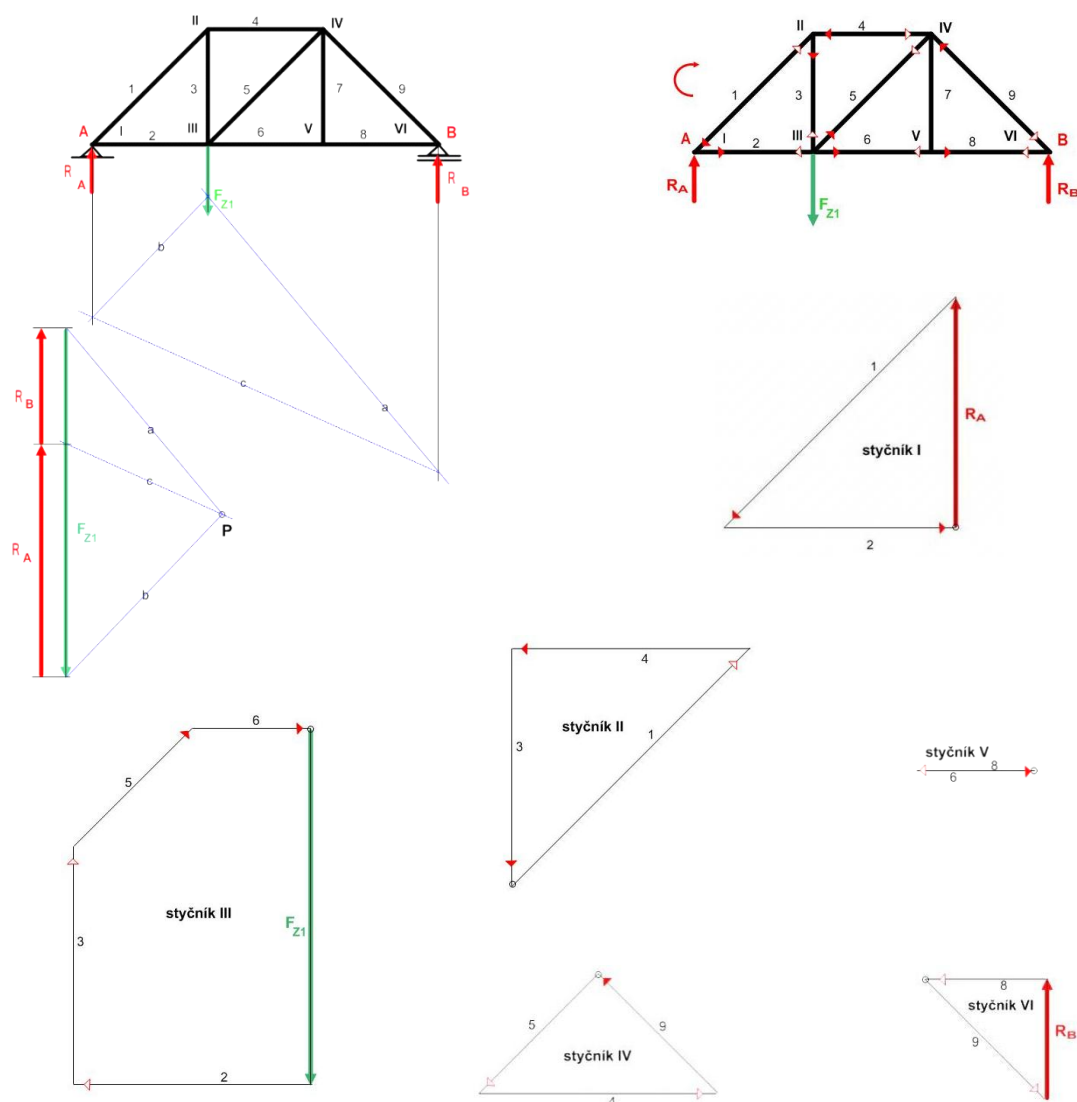
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUTOVÁ SOUSTAVA

16 Řešení celého příkladu by mohlo být uspořádáno například takto:

Grafické řešení:

Měřítko: $m_l = 0,2 \text{ m/mm}$
 $m_F = 10 \text{ N/mm}$



$$R_A = 313 \text{ N}, R_B = 157 \text{ N}$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla	- 443 N	+ 313 N	+ 313 N	- 313 N	+ 222 N	+ 157 N	0 N	+ 157 N	- 222 N

PRUTOVÁ SOUSTAVA

Stejného výsledku lze dosáhnout grafickým řešením prutové konstrukce podle Cremona. U tohoto řešení postupujeme úplně stejným způsobem, jako jsme postupovali v předchozím příkladu. Všechny síly ale zakreslujeme do jednoho obrázku.

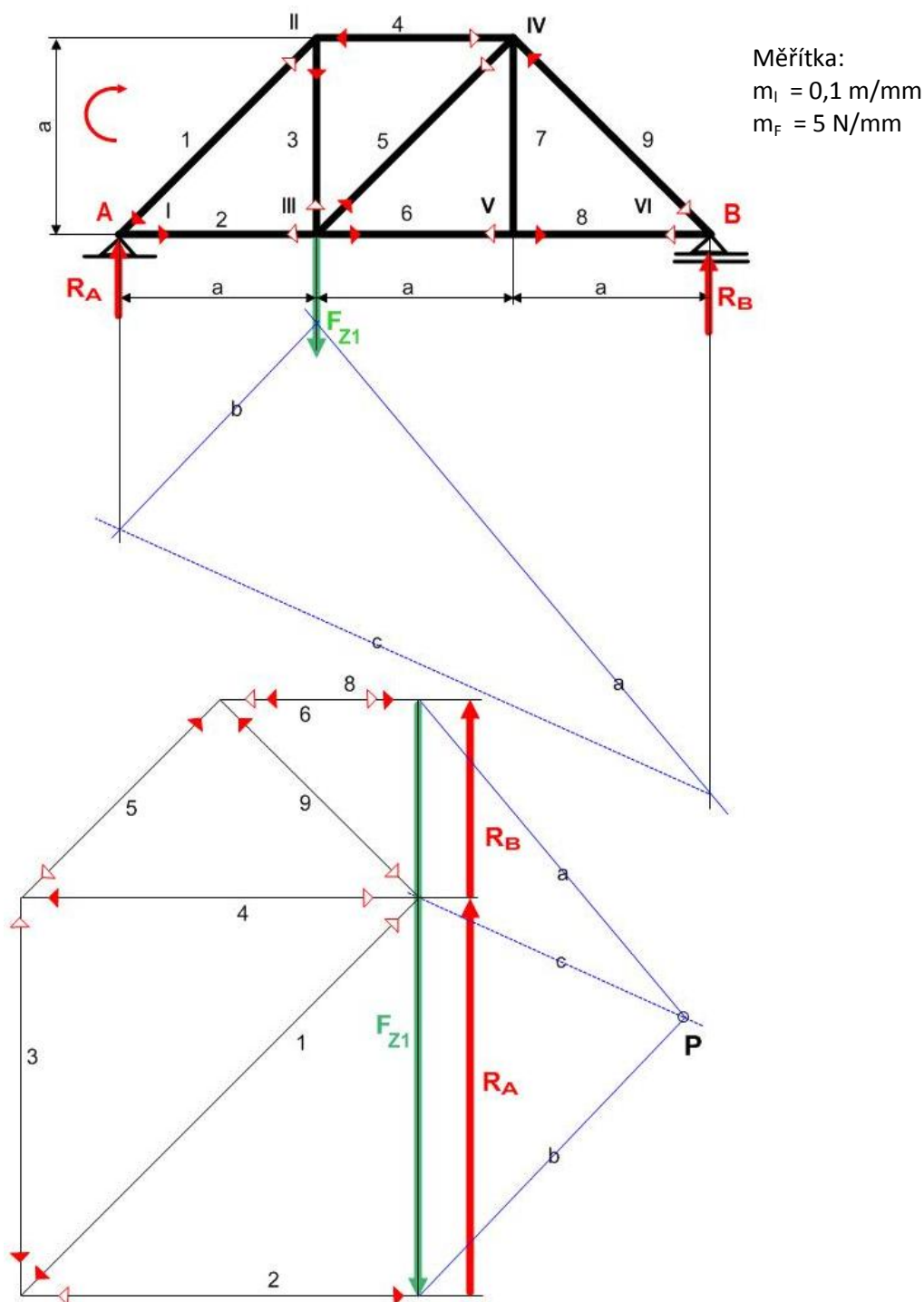
Při kreslení silového obrazce musíme dbát na to, aby taky pořadí všech vnějších sil a reakcí při obíhání celé prutové soustavy navazovalo ve stejném smyslu jako pořadí sil ve styčnících při obíhání styčnících. Ne vždy je toto pořadí shodné s grafickým řešením reakcí a bývá nutno jej překreslit.

Grafické řešení sil podle Cremona je ale rychlejší a efektnější než postupné řešení rovnováhy styčníků, klade však vyšší nároky na pozornost při řešení. Možná chyba se však obvykle projeví tím, že odpovídající přímký ztratí očekávanou návaznost.

Ukázka takového postupu pro náš vzorový příklad je uvedena na následujícím listu:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUTOVÁ SOUSTAVA



$$R_A = 313 \text{ N}, R_B = 157 \text{ N}$$

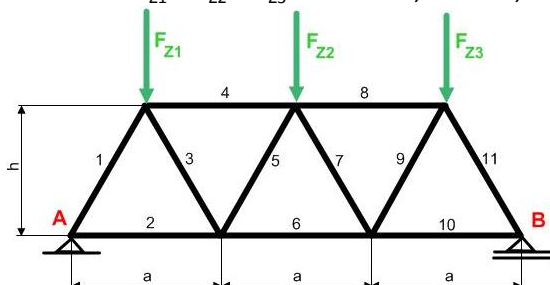
Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla	- 443 N	+ 313 N	+ 313 N	- 313 N	+ 222 N	+ 157 N	0 N	+ 157 N	- 222 N

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUTOVÁ SOUSTAVA

Zadání:

Řešte graficky velikosti reakcí v podporách a velikosti osových sil v jednotlivých prutech prutové soustavy dle obrázku. Dáno: $F_{Z1} = F_{Z2} = F_{Z3} = 35000 \text{ N}$, $a = 3 \text{ m}$, $h = 2,6 \text{ m}$.



Grafické řešení:

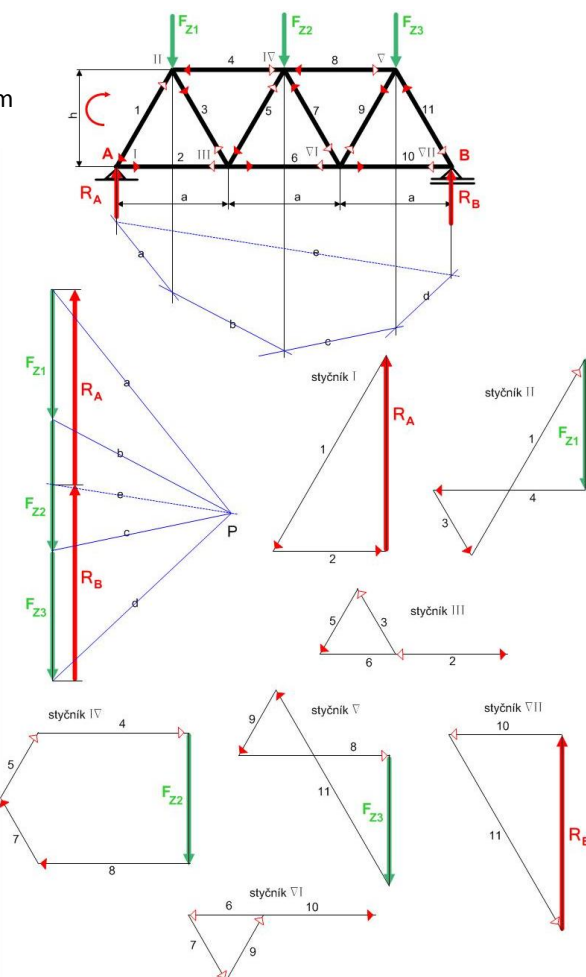
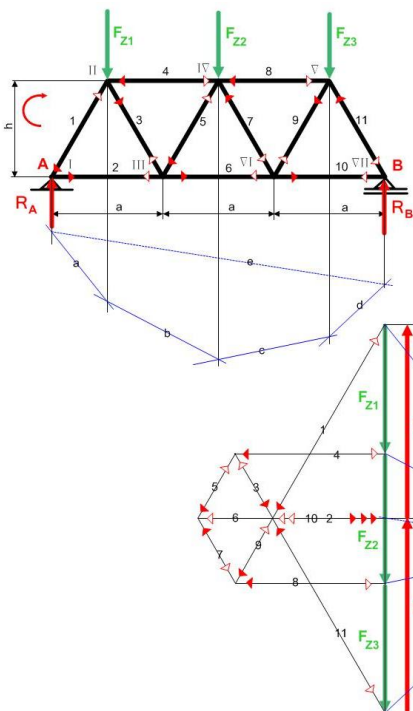
a) dle Cremona

b) postupným řešením styčníků

Měřítko:

$m_l : 0,2 \text{ m/mm}$

$m_F : 2000 \text{ N/mm}$



$$R_A = 52\,500 \text{ N}, R_B = 52\,500 \text{ N}$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6
Osová síla	- 60 622 N	30 311 N	20 203 N	- 40 384 N	- 20 203 N	50 508 N
Číslo prutu	7	8	9	10	11	12
Osová síla	- 20 203 N	- 40 384 N	20 203 N	30 311 N	- 60 622 N	

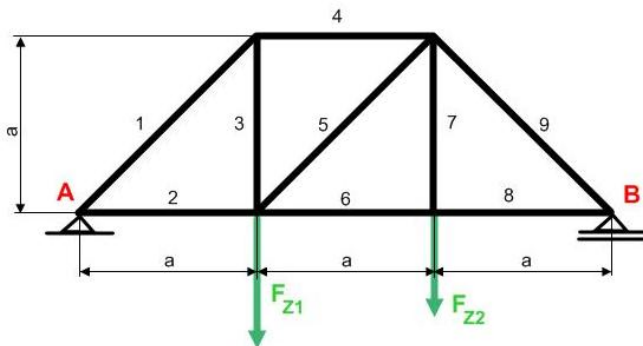
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUTOVÁ SOUSTAVA

Příklady k řešení

Zadání 1:

Řešte graficky velikosti reakcí v podporách a velikosti osových sil v jednotlivých prutech prutové soustavy dle obrázku. Dáno: $F_{Z1} = 400 \text{ N}$, $F_{Z2} = 150 \text{ N}$, $a = 3 \text{ m}$.

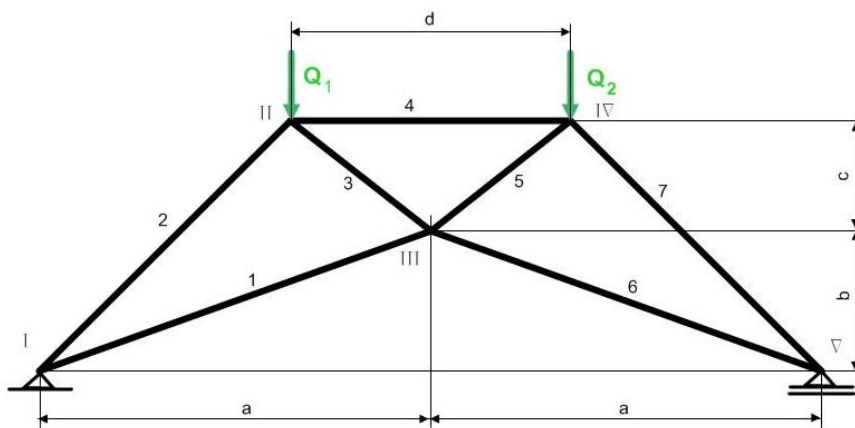


$$R_A = 317 \text{ N}, R_B = 233 \text{ N}$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla	- 448 N	317 N	317 N	- 317 N	118 N	233 N	150 N	233 N	- 330 N

Zadání 2:

Řešte graficky velikosti reakcí v podporách velikosti osových sil v jednotlivých prutech prutové soustavy dle obrázku. Dáno: $Q_1 = 60 \text{ kN}$, $Q_2 = 80 \text{ kN}$, $a = 14 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $c = 4 \text{ m}$, $d = 10 \text{ m}$.



$$R_A = 66,4 \text{ kN}, R_B = 73,6 \text{ kN}$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7
Osová síla	109 kN	- 146,1 kN	69,4 kN	- 157,5 kN	55,1 kN	121,5 kN	- 161,8 kN

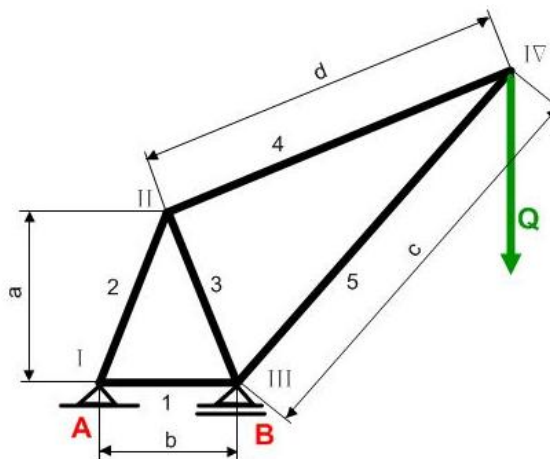
NEŘEŠENÉ
PŘÍKLADY

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUTOVÁ SOUSTAVA

Zadání 3:

Řešte graficky velikosti reakcí v podporách velikosti osových sil v jednotlivých prutech prutové soustavy dle obrázku. Dáno: $Q = 40\,000\text{ N}$, $a = 5\text{ m}$, $b = 4\text{ m}$, $c = 12\text{ m}$, $d = 10,8\text{ m}$.

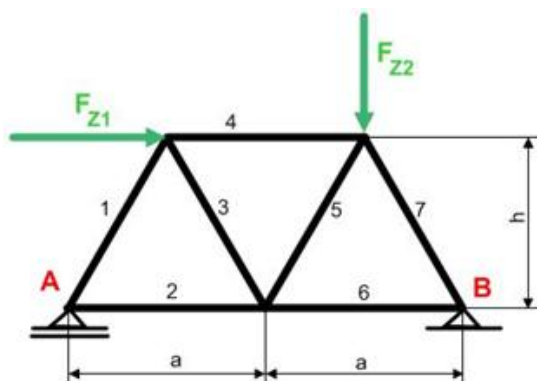


$$R_A = 80,8\text{ kN}, R_B = 120,8\text{ kN}$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5
Osová síla	-32,3 kN	87,0 kN	-63,8 kN	60,0 kN	-83,2 kN

Zadání 4:

Určete graficky reakce v podporách a vnitřní síly v jednotlivých prutech u příhradového nosníku dle obrázku. Dáno: $a = 3\text{ m}$, $h = 2,6\text{ m}$, $F_{Z1} = 8\text{ kN}$, $F_{Z2} = 6\text{ kN}$.



$$R_A = 1,96\text{ kN}, R_B = 8,91\text{ kN}, (R_{Bx} = 4\text{ kN}, R_{By} = 7,96\text{ kN})$$

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7
Osová síla	2,26 kN	- 1,14 kN	- 2,26 kN	- 5,74 kN	2,26 kN	- 3,40 kN	- 9,20 kN