Poměry a úměrnosti II

Dvě čísla (veličiny) můžeme porovnat poměrem jen tehdy, jsou-li uvedeny ve stejných jednotkách. Např. délky dřevěných tyček 5 m a 200 cm musíme převést na stejné jednotky: 5 m a 2 m. Poměr jejich délek pak zapíšeme 5:2. Tento zápis má stejný význam jako zlomek $\frac{5}{2}$. Čteme pět ku dvěma.

?

Jak počítáme s poměrem:

Určete číslo x tak, aby platila rovnost $12:16 = 18:x$.

- zápis převedeme na zlomky $\frac{12}{16} = \frac{18}{x}$
- vynásobíme do kříže $12.x = 16 \,.\, 18$
- pravou stranu vydělíme číslem u x; $x = \frac{16 \cdot 18}{12}$
- vypočítáme $x = 24$.

PŘÍKLADY

1. Určete dvě dvojciferná čísla tak, aby byla v poměru 7 : 3 a jejich rozdíl byl 20.
2. Mostní pilíř je zčásti zapuštěn do země, část je pod vodou a nad vodou vyčnívá 55 cm. Délka části nad vodou k délce části ve vodě je v poměru 1 : 2. Délka části nad vodou k délce části zapuštěné v zemi je v poměru 5 : 7. Určete délku pilíře.
3. Obdélníkový pozemek má na plánu rozměry 1,8 cm a 2,4 cm. Zmenšete je v poměru 2:3.
4. Osm centimetrů na mapě představuje dva kilometry ve skutečnosti. Určete měřítko mapy.
5. Určete rozměry, které má obdélníkový pozemek na plánu s měřítkem 1:500, má-li ve skutečnosti rozměry 20 m a 25 m.

Postupný poměr

- poměr který obsahuje víc čísel než 2, např. 5:7:10 (čteme pět ku sedmi ku deseti)
- postupné poměry můžeme krátit, a to tak, že všechny členy postupného poměru dělíme nebo násobíme týmž číslem.

?

Jak počítáme s postupným poměrem:

Rozdělte odměnu 4 400 Kč v poměru 5:7:10

- znamená to, že danou odměnu máme rozdělit na 5+7+10 = 22 dílů
- vydělíme odměnu počtem dílů, 4 400:22 = 200; na jeden díl tedy připadá 200 Kč.
- vynásobíme hodnotu jednoho dílu počtem dílů, tedy 5 . 200 = 1 000 Kč; 7 . 200 = 1400 Kč; 10 . 200 = 2000 Kč.
- Pro kontrolu sečteme částky 1 000 + 1 400 + 2 000 = 4 400 Kč.

PŘÍKLADY

6. Strany trojúhelníka, jehož obvod je 22,5 cm, jsou v poměru 4:3:2. Jak velké jsou jeho strany?
7. Strany trojúhelníku jsou v poměru 2 : 2,5 : 3,5. Nejdelší strana má délku 60 mm. Určete délky ostatních dvou stran.
8. Tři podílníci si rozdělili zisk 125 000 Kč v poměru 3:2:5. Kolik každý z nich dostal?
9. Kláda délky 145 cm byla rozřezána na 3 kusy, jejichž délky jsou v poměru 12:9:8. Vypočítejte délky jednotlivých kusů.

U následujících úloh je nutné poznat, zda jde o přímou nebo nepřímou úměrnost případně příklad, který není možné řešit ani jedním z obou postupů.

Př. 1: Autobus jedoucí průměrnou rychlost 75 km/h urazí vzdálenost do hlavního města za 2,5 hodiny. Za jak dlouho urazí vzdálenost osobní automobil jedoucí průměrnou rychlost 85 km/h.

Vzdálenost nutná k uražení je stále stejná, při větší rychlosti bude čas kratší $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

75 km/h … 2,5 hodiny
85 km/h … x hodin

$$75 \cdot 2,5 = 85x$$

$$x = \frac{75 \cdot 2,5}{85} = 2,2 \text{ hodiny}$$

Automobil urazí vzdálenost za 2,2 hodiny.

Př. 2: Osamělý cyklista v úniku jede průměrnou rychlostí 42 km/h a do cíle závodu mu zbývá 60 km. Peloton, který jej stíhá, jede díky spolupráci více jezdců průměrnou rychlostí 47 km/h. Jak daleko od cíle musí být peloton, aby cyklistu nedostihl?

Potřebný náskok zjistíme, když budeme vědět, jakou vzdálenost by urazil během jízdy cyklisty v úniku peloton.

větší rychlost $\Rightarrow$ větší vzdálenost $\Rightarrow$ přímá úměrnost

42 km/h … 60 km
47 km/h … x km

Cyklista i peloton musí jet stejnou dobu.

$$\frac{60}{42} = \frac{x}{47}$$

$$x = \frac{60}{42} \cdot 47 \text{ km} = 67,1 \text{ km}$$

Potřebný náskok: $67,1 - 60 \text{ km} = 7,1 \text{ km}$.

Cyklista by potřeboval náskok 7,1 km.

Př. 4: 15 litrů látky váží 117 kg. Kolik kg by vážilo 33 litrů látky?

15 litrů … 117 kg
33 litrů … x kg

Čim víc látky, tím víc váží $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

Každý litr látky váží stejně: $\frac{117}{15} = \frac{x}{33}$.

$$x = \frac{117}{15} \cdot 33 = 257,4 \text{ kg}$$

33 litrů látky bude vážit 257,4 kg.

Př. 5: Dvoukilové závaží vyrobené z látky o hustotě $7800\ \mathrm{kg/m^3}$ má objem 0,26 litru. Jaký objem bude mít dvoukilové závaží vyrobené z látky o hustotě $2700\ \mathrm{kg/m^3}$?

$7800\ \mathrm{kg/m^3}$ … 0,26 litru
$2700\ \mathrm{kg/m^3}$ … x litru
Menší hustota, větší objem $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.
Hmotnost závaží je pořád stejná: $7800\cdot 0,26 = 2700x$.

$$x=\frac{7800\cdot 0,26}{2700}0,751$$

Závaží z látky o hustotě $2700\ \mathrm{kg/m^3}$ by mělo objem 0,75 l.

Na závěr tři příklady na dvojitou trojčlenku.

Následující příklady nejsou obtížné, pokud si je dokážeme rozdělit na dvě úměrnosti. ZAPAMATUJTE!!!

Př. 6: 10 studentů udělá za 6 hodin matematiky do sešitů 48 chyb. Kolik chyb udělá 30 studentů za 120 hodin?

V zadání je nečekaně mnoho údajů.
10 studentů … 6 hodin … 48 chyb
30 studentů … 120 hodin … x chyb

Počet chyb závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ řešení prostou úměrou není možné (mění se počet studentů i počet hodin) $\Rightarrow$ zkusíme vyřešit jednodušší příklad, ve kterém se například změní pouze počet studentů a z něj vypočteme konečný výsledek.

Změna počtu studentů
10 studentů … 6 hodin … 48 chyb
30 studentů … 6 hodin … y chyb

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ můžeme ho vynechat $\Rightarrow$ získáme normální příklad.
10 studentů … 48 chyb
30 studentů … y chyb
Víc studentů, víc chyb $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{48}{10}=\frac{y}{30}$.

$$y=\frac{48}{10}\cdot 30 = 144\ \text{chyb}$$

Doplníme do původního schématu:
10 studentů … 6 hodin … 48 chyb
30 studentů … 120 hodin … x chyb
30 studentů … 6 hodin … 144 chyb
$\Rightarrow$ Spodní dva řádky nám umožňují příklad dořešit.

Změna počtu hodin

30 studentů … 6 hodin … 144 chyb
30 studentů … 120 hodin … x chyb

Počet studentů se nemění $\Rightarrow$ počítáme bez něj.
6 hodin … 144 chyb
120 hodin … x chyb
Víc hodin, víc chyb $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{144}{6}=\frac{x}{120}$.

$x=\frac{144}{6}\cdot 120=2880$ chyb

30 studentů udělá za 120 hodin 2880 chyb.

Př. 7: 6 dělníků vykope dva příkopy za 12 dní. Za kolik dní vykope 10 dělníků 3 příkopy?

Stejně složitý příklad jako předchozí.
6 dělníků … 2 příkopy … 12 dní
10 dělníků … 3 příkopy … x dní
Počet dní závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dva normální (více možností).

Změna počtu dělníků
6 dělníků … 2 příkopy … 12 dní
10 dělníků … 2 příkopy … y dní

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ vynecháme jej a tak získáme běžný příklad.
6 dělníků … 12 dní
10 dělníků … y dní
Víc dělníků, méně času $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $6\cdot 12=10\cdot y$.

$y=\frac{6\cdot 12}{10}=7{,}2$ dne

Doplníme do původního schématu.
6 dělníků … 2 příkopy … 12 dní
10 dělníků … 3 příkopy … x dní
10 dělníků … 2 příkopy … 7,2 dne
$\Rightarrow$ Spodní dva řádky nám umožňují příklad dořešit.

Změna počtu příkopů
10 dělníků … 2 příkopy … 7,2 dne
10 dělníků … 3 příkopy … x dní

Počet dělníků se nemění $\Rightarrow$ počítáme bez něj.
2 příkopy … 7,2 dne
3 příkopy … x dní
Víc příkopů na vykopání, víc dnů práce $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{7{,}2}{2}=\frac{x}{3}$.

$x=\frac{7{,}2}{2}\cdot 3=10{,}8$ dne

10 dělníků vykope 3 příkopy za 10,8 dne..

Př. 8: 5 čerpadel o výkonu 50 l/s napustí bazén za 30 minut. Za jak dlouho napustí bazén 3 čerpadla o výkonu 60 l/s.

5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min

Počet minut závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dva normální (více možností).

Změna počtu čerpadel
5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 50 l/s … y min

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ vynecháme jej.
5 čerpadel … 30 min
3 čerpadla … y min
Víc čerpadel, méně času $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $5 \cdot 30 = 3 \cdot y$.
$y = \frac{5 \cdot 30}{3} = 50$ minut

Doplníme do původního schématu.
5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min
3 čerpadla … 50 l/s … 50 min

Změna výkonu čerpadel
3 čerpadla … 50 l/s … 50 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min

Počet čerpadel se nemění $\Rightarrow$ počítáme bez něj.
50 l/s … 50 min
60 l/s … x min
Větší výkon čerpadel, kratší čas napouštění $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $50 \cdot 50 = x \cdot 60$.
$x = \frac{50 \cdot 50}{60} = \frac{125}{3} \doteq 41{,}67$ minut

3 čerpadla o výkonu 60 l/s naplní bazén za 42 minut.

Př. 9: Pět princezen protančí za tři plesy, které trvají šest hodin, dvacet párů střevíců. Kolik střevíců protančí osm princezen za pět plesů, které trvají sedm hodin?

5 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 20 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 7 hodin ... x párů

Ještě složitější příklad než předchozí $\Rightarrow$ rozložíme na více částí, v každé se od prvního řádku přiblížíme k druhému.

5 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 20 párů
8 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... y párů
Více princezen, více protančených párů $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{20}{5} = \frac{y}{8}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{20}{5} \cdot 8 = 32$
8 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 32 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 7 hodin ... x párů

8 princezen ... 3 plesy ... 6 hodin ... 32 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 6 hodin ... z párů

Více plesů, více protančených párů $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow \dfrac{32}{3} = \dfrac{z}{5} \Rightarrow z = \dfrac{32}{3} \cdot 5 = 53,3$.

8 princezen ... 5 plesů ... 6 hodin ... 53,3 párů
8 princezen ... 5 plesů ... 7 hodin ... x párů

Více hodin, více protančených párů $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow \dfrac{53,3}{6} = \dfrac{x}{7} \Rightarrow x = \dfrac{53,3}{6} \cdot 7 = 62,2$.

Osm princezen protančí za pět plesů, které trvají sedm hodin 62 párů střevíců.

Měřítko mapy

Měřítko mapy udává poměr vzdálenosti na mapě ku vzdálenosti ve skutečnosti.

Měřítko mapy 1:100 000 znamená, že 1 cm na mapě znamená 100 000 cm ve skutečnosti.

Při výpočtu je důležité si uvědomit, že 1 km = 1000 m = 100 000 cm.

Na mapě s měřítkem 1:100 000 vzdálenost 1 cm na mapě představuje 1 km reálné vzdálenosti.

Zvol správnou odpověď a tu ověř výpočtem:

1. Měřítko 1: 50 000 znamená, že 1 cm na mapě představuje:
   a) 5 m
   b) 5 km
   c) 500 m
   d) 50 m
2. Měřítko 1: 2 000 znamená, že 1 cm na mapě představuje:
   a) 2 m
   b) 20 m
   c) 200 m
   d) 2 km
3. Vzdálenost 2,5 km je na mapě zobrazena úsečkou dlouhou 1 cm. Měřítko mapy je:
   a) 250 : 1
   b) 1 : 250
   c) 1 : 250 000
   d) 250 000 : 1
4. Vzdálenost 12 km je zobrazena na mapě v měřítku 1:100 000 úsečkou dlouhou:
   a) 0,12 cm
   b) 1,2 cm
   c) 12 cm
   d) 120 cm

5. Na mapě s měřítkem 1 : 60 000 zobrazuje úsečka délky 3 cm ve skutečnosti vzdálenost:
   a) 1,8 m
   b) 1,8 km
   c) 180 m
   d) 180 km

Řešení: 500 m; 20 m; 1:250 000; 12 cm; 1,8km