Exponenciální rovnice

<u>Exponenciální rovnice</u> **jsou rovnice, ve kterých se neznámá x ϵ R vyskytuje v exponentu**

Obecně můžeme zapsat exponenciální rovnici takto :

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{g(x)}}$$

kde a>0, b>0

např. je to rovnice $2^x = 8 \longrightarrow 2^x = 2^3$

POZOR :

- **Při řešení exponenciálních rovnic používáme <u>neekvivalentní úpravy</u>** $\longrightarrow$ **<u>zkouška</u> dosazením do původní rovnice <u>je součástí řešení</u>**
- **Důležitý je <u>zápis množiny řešení</u>** $\longrightarrow$ **ne každý kořen rovnice je řešením**

Vztahy užitečné při řešení exponenciálních rovnic

- umocňování součinu: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- násobení čísel o stejném základu: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- dělení čísel o stejném základu: $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- umocňování: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- převod odmocniny na exponent: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- převod exponenciálního tvaru na tvar zlomku: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

kde $a, b, x, y, m \in R$, $n \in N$, $a \neq 0$

Způsoby řešení

Způsoby řešení odvodíme pomocí následujících příkladů:

1) **Řešte rovnici** $2^{x-2} = 2^{5x-6}$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Je zřejmé, že z rovnosti základů bude plynout rovnost jejich exponentů

$$2^{x-2} = 2^{5x-6}$$

$$x-2 = 5x-6$$

$$\underline{x = 1}$$

Výsledek ověříme pomocí zkoušky dosazením do zadání:

$$L(1) = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad P(1) = 2^{5\cdot 1-6} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \longrightarrow L(1) = P(1)$$

Zapíšeme množinu řešení: $P = \{ 1 \}$

2) Řešte rovnici $\frac{1}{5^{3x-2}} = 125$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Pokusíme se získat na pravé straně rovnice také základ 5

$\longrightarrow$ **převedeme číslo 125 jako 5^3**

$$\frac{1}{5^{3x-2}} = 5^3$$

nyní převedeme tvar zlomku na exponenciální tvar

$$5^{-(3x-2)} = 5^3$$

z rovnosti základů opět plyne rovnost jejich exponentů

$$-(3x-2) = 3$$

$$-3x + 2 = 3 \longrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

výsledek ověříme zkouškou:

$$L\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5^{3\left(-\frac{1}{3}\right)-2}} = \frac{1}{5^{-3}} = 5^3 = 125 \qquad P\left(-\frac{1}{3}\right) = 125 \longrightarrow L = P$$

$$P = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Závěr

1. způsob řešení:

Pro každá čísla $x, y \in R$ a pro každé číslo $a \in R$, kde $a \neq 1$ platí:

jestliže $\boxed{a^x = a^y}$ **pak** $\boxed{x = y}$

porovnáme exponenty

3) Řešte rovnici $2^{x+1} = 6$

Jak budeme postupovat?

Řešení

nemáme stejné základy, pokusíme se tedy nejprve rovnici upravit pomocí vztahů mezi exponenty

$$2^{x+1} = 6$$

$$2^x \cdot 2^1 = 6 \quad / :2$$

$$2^x = 3$$

dostáváme různé základy $\longrightarrow$ nelze porovnat jejich exponenty

jediný způsob, jak řešit tento typ rovnice je celou rovnici **zlogaritovat**

$$\log 2^x = \log 3$$

upravíme podle vzorce pro počítání s logaritmy

$$x \cdot \log 2 = \log 3 \longrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1{,}585$$

$$\text{ZK.}: L\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right) = 2^{\frac{\log 3}{\log 2} + 1} = 6 \qquad P\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right) = 6 \longrightarrow L = P$$

$$P = \left\{ \frac{\log 3}{\log 2} \right\}$$

4) **Řešte rovnici** $5^{x+1} = 5^{x} + 16$

Jak budeme postupovat?

Řešení

je zřejmé, že musíme rovnici nejprve upravit

$$5^{x+1} = 5^x + 16$$

$$5^x \cdot 5^1 = 5^x + 16$$

$$5 \cdot 5^x = 5^x + 16 \qquad / - 5^x$$

$$4 \cdot 5^x = 16 \qquad / : 4$$

$$5^x = 4$$

máme na obou stranách rovnice různé základy → musíme celou rovnici zlogaritmovat

$$\log 5^x = \log 4$$

$$x \cdot \log 5 = \log 4$$

$$x = \frac{\log 4}{\log 5} \cong 0{,}861$$

Zk. : $L\left(\frac{\log 4}{\log 5}\right) = 5^{\frac{\log 4}{\log 5} + 1} = 20 \qquad P\left(\frac{\log 4}{\log 5}\right) = 5^{\frac{\log 4}{\log 5}} + 16 = 20 \qquad L = P$

$$P = \left\{ \frac{\log 4}{\log 5} \right\}$$

Závěr

2. způsob řešení:

Jediný způsob jak řešit exponenciální rovnice, které nelze převést na stejný základ.

celou rovnici zlogaritmuji

$$\downarrow$$

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

$$\downarrow$$

$$\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$$

$$\downarrow$$

podle vzorců pro počítání s logaritmy dostáváme

$$f(x) \log a = g(x) \log b$$

Pozn. tento způsob můžeme použít i u předchozího typu rovnic

5) Řešte rovnici $5^{2x} - 2 \cdot 5^{x} + 1 = 0$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Tento typ exponenciální rovnice budeme řešit pomocí **substituce**

$\longrightarrow$ dosadíme za 5^x například neznámou t $\longrightarrow$ $5^x = t$

$$5^{2x} - 2 \cdot 5^x + 1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

a řešíme jednoduchou kvadratickou rovnici $\longrightarrow$ $t = 1$

$$\downarrow$$

vrátíme se zpět k substituci a dosadíme za t = 1

$$\downarrow$$

$$5^x = 1$$

$$5^x = 5^0$$

$$x = 0$$

Zk.: $L(0) = 5^{2 \cdot 0} - 2 \cdot 5^0 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ $\quad P(0) = 0 \longrightarrow L = P$

$$P = \{ 0 \}$$

6) Řešte rovnici $4^{2x} - 6 \cdot 4^{x} + 8 = 0$

Jak budeme postupovat ?

Řešení

opět použijeme substituci $\longrightarrow$ dosadíme za 4^x neznámou t

$$4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0 \qquad 4^x = t$$

$$\downarrow$$

$$t^2 - 6 \cdot t + 8 = 0$$

řešíme kvadratickou rovnici, kde $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 8 = 4$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 2}{2} \longrightarrow t_1 = 4 \quad t_2 = 2$$

vrátíme se k substituci:

$$4^x = 4 \longrightarrow x = 1 \qquad 4^x = 2 \longrightarrow 4^x = 4^{\frac{1}{2}} \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Zk.: } L(1) = 4^{2 \cdot 1} - 6 \cdot 4^1 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0 \qquad P(1) = 0 \longrightarrow L = P$$

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{2 \cdot \frac{1}{2}} - 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 8 = 4 - 12 + 8 = 0 \qquad P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \longrightarrow L = P$$

$$P = \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$

Závěr

3. způsob řešení

exponenciální rovnice, kde se nachází tvar kvadratické rovnice (především exponent 2x) řešíme pomocí substituce

dosadíme do rovnice a získáme kvadratickou rovnici

výsledné kořeny nejsou řešením exponenciální rovnice

musíme dosadit zpět do zvolené substituce