

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST - PŘÍKLADY

Příklad č. 1

Dokažte, že posloupnost $a_n = 3n - 1$ je aritmetická. Musí platit $n \in \mathbb{N}$.

Řešení:

Pro dva po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti platí:

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Dosaďte:

$$a_n = 3n - 1$$

$$a_{n+1} = 3(n+1) - 1$$

$$a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 1] - (3n - 1) = 3n + 3 - 1 - 3n + 1 = 3$$

Rozdíl je konstantní \Rightarrow posloupnost je aritmetická s diferencí $d = 3$.

Příklad č. 2

V aritmetické posloupnosti platí

$$a_5 + 2a_7 = 0, \quad a_9 - a_3 = 9.$$

- a) Určete první člen a diferencí aritmetické posloupnosti;
b) Kolikátý člen je roven 145 a 200.

Řešení:

a) Řešte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a_1, d :

$$a_5 + 2a_7 = 0$$

$$a_9 - a_3 = 9$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ a_1 + 4d + 2(a_1 + 6d) = 0 \end{array}$$

$$a_1 + 8d - (a_1 + 2d) = 9$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 3a_1 + 16d = 0 \end{array}$$

$$6d = 9 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 3a_1 + 16 \cdot \frac{3}{2} = 0 \end{array}$$

$$3a_1 = -24$$

$$a_1 = -8$$

b) Kolikátý člen je roven 145 a 200. Musíme zjistit $n = ?$.

$$a_n = 145, n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d} = \frac{145 + 8 + 1,5}{1,5} = 103$$

V aritmetické posloupnosti platí: $a_{103} = 145$

$$a_n = 200, n = ?$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d} = \frac{200 + 8 + 1,5}{1,5} = 139,7$$

Musí platit $n \in \mathbb{N}$, proto není číslo 200 členem aritmetické posloupnosti.

Příklad č. 3

Vypočítejte patnáctý člen aritmetické posloupnosti, je-li pátý člen 10 a difference -3.

Řešení:

$$a_5 = 10, d = -3, a_{15} = ?$$

Použijte vzorec: $a_r = a_s + (r-s) \cdot d$

$$a_{15} = a_5 + 10d = 10 + 10(-3) = -20$$

Příklad č. 4

Kolikátý člen aritmetické posloupnosti je 63, je-li první člen -12 a difference 1,5.

Řešení:

$$a_n = 63, n = ?, a_1 = -12, d = 1,5$$

Použijte vzorec:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + nd - d$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d} = \frac{63 - (-12) + 1,5}{1,5} = 51$$

51. člen aritmetické posloupnosti je 63, $a_{51} = 63$.

Příklad č. 5

V aritmetické posloupnosti je dán první člen $a_1 = 3,12$, diference $d = -0,24$.
Určete, kolik členů posloupnosti dává součet $s_n = -10,8$.

Řešení:

$$a_1 = 3,12, d = -0,24, s_n = -10,8, n = ?$$

Použijte vzorec: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d)$$

$$-10,8 = \frac{n}{2}(6,24 - 0,24n + 0,24)$$

$$-21,6 = n(6,48 - 0,24n)$$

$$-21,6 = 6,48n - 0,24n^2$$

$$24n^2 - 648n - 2160 = 0$$

$$n^2 - 27n - 90 = 0$$

$$n_{1,2} = 30, -3$$

Musí platit $n \in \mathbb{N}$, proto $n = 30$, $s_{30} = -10,8$.

Příklad č. 6

V aritmetické posloupnosti určete:

a) a_1, d platí-li $a_5 + a_{13} = 14, \frac{a_7}{a_{11}} = \frac{3}{4}$;

b) kolik členů této posloupnosti dává součet $s_n = 1820$.

Řešení:

a) Řešte soustavu dvou rovnic o neznámých a_1, d :

$$a_5 + a_{13} = 14$$

$$\frac{a_7}{a_{11}} = \frac{3}{4}$$

$$a_1 + 4d + a_1 + 12d = 14$$

$$\frac{a_1 + 6d}{a_1 + 10d} = \frac{3}{4}$$

$$2a_1 + 16d = 14$$

$$4a_1 + 24d = 3a_1 + 30d$$

$$a_1 + 8d = 7$$

$$a_1 = 6d$$

$$14d = 7$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 3$$

První člen je $a_1 = 3$, diference $d = \frac{1}{2}$.

$$b) s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d)$$

$$1\,820 = \frac{n}{2}\left(6 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)$$

$$3\,640 = n\left(6 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)$$

$$3\,640 = 6n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$7\,280 = 12n + n^2 - n$$

$$n^2 + 11n - 7\,280 = 0$$

$$n_{1,2} = 80, -91$$

Musí platit $n \in \mathbb{N}$, proto $n = 80$, $s_{80} = 1\,820$.

Příklad č. 7

V aritmetické posloupnosti je dáno $a_n = 40$, $s_n = 208$, $d = 4$. Vypočítejte a_1 , n

Řešení:

Řešte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a_1 , n :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$40 = a_1 + (n-1) \cdot 4$$

$$208 = \frac{n}{2}(a_1 + 40)$$

$$40 = a_1 + 4n - 4 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 44 - 4n$$

$$416 = n \cdot a_1 + 40n$$

$$416 = n(44 - 4n) + 40n$$

$$4n^2 - 84n + 416 = 0$$

$$n^2 - 21n + 104 = 0$$

$$n_{1,2} = 8, 13$$

Musí platit $n \in \mathbb{N}$, proto existují dvě řešení $n_{1,2} = 8, 13$.

1. řešení: $n = 13 \Rightarrow a_1 = -8$

2. řešení: $n = 8 \Rightarrow a_1 = 12$

Příklad č. 8

Kolik tašek je potřeba na pokrytí lichoběžníkové střechy, položíme-li u okapu 162 tašek, v každé další řadě je o tašku méně. Řad je 38.

Řešení:

Označte si zadané hodnoty. $a_1 = 162$, $d = -1$, $n = 38$, $s_{38} = ?$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{38} = \frac{38}{2}(a_1 + a_{38}) = 19(a_1 + a_1 + 37d) = 19(324 - 37) = 5\,453$$

Na pokrytí střechy je potřeba 5453 tašek.

Příklad č. 9

Obsah pravoúhlého trojúhelníku je 6 cm^2 . Vypočtěte délky jeho stran, tvoří-li tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Řešení:

Vytvořte soustavu dvou rovnic.

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

V soustavě je příliš mnoho neznámých. Jednotlivé strany trojúhelníku zapište jako tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

$$a = b - d$$

$$b = b$$

$$c = b + d$$

Dosaďte do soustavy rovnic.

$$6 = \frac{(b-d) \cdot b}{2}$$

$$(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$$

$$12 = b^2 - bd$$

$$b^2 - 2bd + d^2 + b^2 = b^2 + 2bd + d^2$$

$$12 = b^2 - bd$$

$$b^2 = 4bd \quad \Rightarrow \quad d = \frac{b}{4}$$

$$12 = b^2 - b \frac{b}{4}$$

$$12 = b^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$48 = 4b^2 - b^2$$

$$b^2 = 16$$

$$b = \pm 4$$

Počítejte délku strany, $b = 4 \text{ cm}$.

Dopočítejte zbývající hodnoty.

$$d = 1, a = 3 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}.$$

Trojúhelník má strany délky $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$. Tyto strany tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 1$.

Příklad č. 10

Dělník vyrobí za směnu 45 součástek. Kolik součástek by vyrobil za 20 směn, kdyby svůj výkon postupně zvyšoval každou směnu o 2 součástky?

Řešení:

Označte si zadané hodnoty. $a_1 = 45$, $d = 2$, $n = 20$, $s_{20} = ?$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20})$$

$$s_{20} = 10(a_1 + a_1 + 19d) = 10(90 + 38) = 1\,280$$

Dělník vyrobí za 20 směn 1280 součástek, $s_{20} = 1\,280$.