

0 KOMBINATORIKA – OPAKOVÁNÍ UČIVA ZE SŠ



Čas ke studiu kapitoly: 30 minut



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět použít

- základní pojmy kombinatoriky
- vztahy pro výpočet kombinatorických úloh



Výklad:

0.1 Kombinatorika – co to je?

Kombinatorika je vstupní branou do teorie pravděpodobnosti. Zabývá se různými způsoby výběru prvků z daného souboru. Už jste si vzpomněli? Jde přece o součást středoškolské matematiky. Ale protože opakování je matkou moudrosti, jdeme na to ...

Nejdříve si ujasněme s jakými výběry se v praxi můžeme setkat. Prvním kritériem je uspořádanost výběru.

A. Uspořádaný výběr (= Variace)

je takový výběr, při němž záleží na pořadí vybraných prvků.

Př.: Kolik trojčiferných čísel lze sestavit z čísel 1; 3; 8; 9?

Číslo 139 a číslo 391 považujeme za dvě různé variace výběru.

B. Neúspořádaný výběr (= Kombinace)

je oproti tomu výběrem, při kterém na pořadí vybraných prvků nezáleží.

Př.: Kolik je možností jak vsadit Sportku?

7 čísel ze 49 – např. kombinace $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ je totožná s kombinací $\{2;3;1;6;7;4;5\}$ – nezáleží na tom v jakém pořadí jsme čísla zaškrtnali.

Druhým kritériem je skutečnost, zda se prvky po výběru do původní množiny vracejí či nikoliv. Podle toho se výběry rozlišují na:

A. Výběry s opakováním

tj. vybrané prvky se vracejí do původní množiny

Př.: Z množiny $\{1;3;8;9\}$ lze mimo jiné vytvořit trojčíslí $\{131; 188; 888; 119; 139 \dots\}$

B. Výběry bez opakování

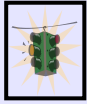
tj. vybrané prvky se do původní množiny nevracejí

Matematicky je jednodušší popis výběrů s opakováním, avšak v praxi se častěji setkáte s výběry bez opakování (test není možno opakovat, např. tažnost trubky můžete testovat pouze jednou, pro další test je zapotřebí použít novou trubku)

0.2 Základní kombinatorická pravidla

0.2.1 Kombinatorické pravidlo součinu

Toto pravidlo používáme v běžném životě zcela automaticky. Než uvedeme jeho matematickou formulaci, ukážeme si jeho využití na příkladu.

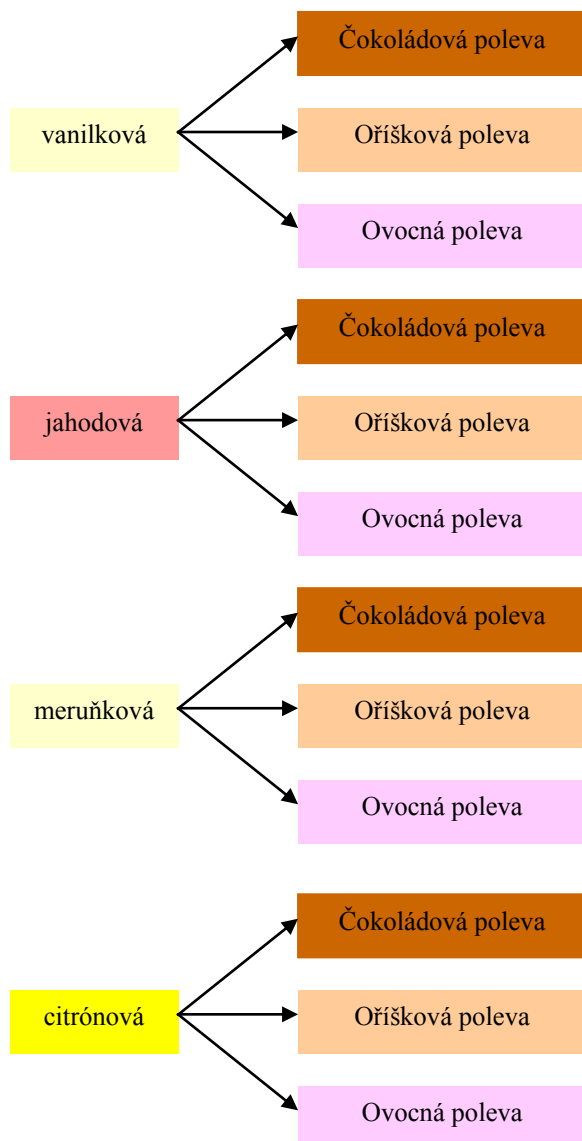


Řešený příklad:

U stánku nabízejí čtyři druhy zmrzliny a tři polevy. Kolik různých zmrzlin s polevou lze vytvořit, jestliže nechceme míchat více druhů ani více polev?

Řešení:

Následující diagram zobrazuje všechny možnosti výběru:



Ke každému ze čtyř druhů zmrzliny můžeme přidat jednu ze tří polev, celkem je proto možné vytvořit $4 \cdot 3 = 12$ různých zmrzlin s polevou.



Výklad:

Zobecněním předchozí úvahy dojdeme k následujícímu pravidlu nazývanému **kombinatorické pravidlo součinu**:

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

V úvodním příkladě jsme hledali uspořádané dvojice druh – poleva, jejichž první člen (druh) lze vybrat čtyřmi způsoby a druhý člen (polevu) lze vybrat třemi způsoby. Tedy $k = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$; $n_1 \cdot n_2 = 12$.

0.2.2 Kombinatorické pravidlo součtu

Také toto pravidlo v životě často využíváme, aniž si to uvědomujeme. Jestliže máme např. tři žluté, dvě modré a čtyři zelené pastelky, umí každý snadno spočítat, že dohromady máme $3 + 2 + 4 = 9$ pastelek. Matematicky se toto pravidlo formuluje takto:

Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, \dots, p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

0.3 Uspořádané výběry (variace)

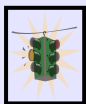
Znovu si připomeňme, že u variací záleží na pořadí vybíraných prvků.

0.3.1 Variace k -té třídy bez opakování

Nechť M je libovolná množina n prvků. Každá uspořádaná k -tice (skupina k prvků) z navzájem různých prvků množiny M se nazývá variace k -té třídy množiny M bez opakování a značíme ji $V_k(n)$ – **variační číslo**.

Počet variací $V_k(n)$ se určuje podle vztahu:

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$



Řešený příklad:

V první fotbalové lize je 16 mužstev. Kolika způsoby mohou být na konci soutěže obsazeny stupně vítězů?

Řešení:

Vybíráme trojici mužstev, která obsadí stupně vítězů. Na pořadí v této trojici samozřejmě záleží.

$$V_3(16) = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$$

Stupně vítězů mohou být obsazeny 3360-ti způsoby.



Výklad:

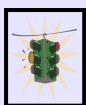
V případě, že velikost výběru je totožná s rozsahem množiny M ($k=n$) používáme pro tento typ variací název **permutace**. U permutací tak nejde v podstatě o výběr, nýbrž o různá uspořádání téže množiny (přesmyčky).

0.3.2 Permutace bez opakování

Permutace množiny M (bez opakování) jsou všechna navzájem různá uspořádání množiny M .

Počet permutací n prvkové množiny stanovíme na základě vztahu:

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$



Řešený příklad:

Vraťme se opět k volbě předsednictva zastupitelstva. Předpokládejme však, že předsednictvo je už zvoleno a je pouze třeba rozdělit si funkce. Kolik je možností, jak si funkce rozdělit?

Řešení:

Je zřejmé, že jde o permutace (přesmyčky) 5-ti členné množiny:

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Předsednictvo si tedy může rozdělit funkce 120-ti způsoby.



Výklad:

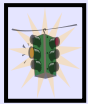
Definujme si opět M jako libovolnou n -prvkovou množinu.

0.3.3 Variace k -té třídy s opakováním

tak nazýváme každou uspořádanou k -tici prvků z množiny M , v níž se jednotlivé prvky mohou opakovat.

Počet variací k -té třídy s opakováním určuje výraz $V_k(n)$

$$V_k(n) = n^k$$



Řešený příklad:

Určete kolik je možností jak sestavit 6-ti místné telefonní číslo.

Řešení:

V tomto případě si zvolíme množinu M , $M = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Potřebujeme obsadit 6 míst.

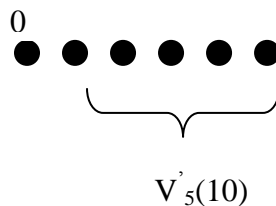


Je zřejmé, že existuje celkem

$$V_6(10) = 10^6$$

možností jak uspořádat 10 číslic do šestice.

V tuto chvíli si musíme uvědomit, že telefonní číslo nemůže začínat „0“, proto musíme tyto možnosti od celkového počtu odečíst.



$$V_5(10) = 10^5$$

Mezi všemi 6-ti místnými čísly je 10^5 čísel začínajících „0“. Existuje tedy 900 000 ($10^6 - 10^5$) možností jak vytvořit 6-ti místné telefonní číslo.



Výklad:

0.3.4 Permutace s opakováním

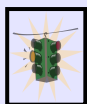
Mějme uspořádanou n -tici k různých prvků, v níž se jednotlivé prvky opakují n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) krát. Permutace s opakováním vznikají různým uspořádáním původní n -tice.

Platí:

$$\sum_{i=1}^k n_i = n$$

Počet permutací s opakováním je dán vztahem:

$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{P(n)}{P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \dots \cdot P(n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$



Řešený příklad:

Na plakátovací plochu o kapacitě 10 míst se mají vylepit reklamní plakáty 4 společností. Společnost ARMA si předplatila 3 plakáty, společnost BRUNO 2 plakáty, společnost CEKO 1 plakát a společnost DINA 4 plakáty. Určete kolika různými způsoby lze plochu pokrýt.

Řešení:

Předpokládáme-li, že každá společnost dodala pouze jediný druh plakátu, pak jednotlivé varianty polepení tvoří permutace s opakováním:

$$P'_{4,3,2,1,4} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 12600$$

Plakátovací plochu lze polepit 12600 různými způsoby.



Výklad:

0.4 Neuspořádané výběry (kombinace)

Kombinace se používají v případech, kdy se ze skupiny prvků vybírá menší podskupina, jejíž prvky nemají specifickou roli, tj. jsou vzájemně zaměnitelné (nezáleží na pořadí vybraných prvků).

Příkladem takovéto podskupiny je závodní družstvo mladších žáků pro běh na 1500 metrů (reprezentujících jistou ZŠ).

Definujme si znovu M jako libovolnou n prvkovou množinu.

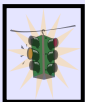
0.4.1 Kombinace k -té třídy bez opakování

pak nazvěme každou k prvkovou podmnožinu sestavenou z navzájem různých prvků množiny M .

Počet různých kombinací $C_k(n)$ se určí na základě vzorce:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Hodnota $C_k(n)$ se nazývá **kombinační číslo**.



Řešený příklad:

Ve čtvrtém ročníku ZŠ studuje 30 chlapců a 50 děvčat. Pro reprezentaci ročníku v lehké atletice je třeba sestavit smíšené 10-ti členné družstvo (5 chlapců, 5 dívek). Kolik je možností jak takovéto družstvo sestavit?

Řešení:

Pro výpočet použijeme kombinatorické pravidlo o součinu: Celkový počet možností jak sestavit družstvo (n) je dán součinem počtu možností jak vybrat 5 chlapců ze 30-ti (n_1) a 5 dívek z 50-ti (n_2).

Počet možností jak vybrat 5 chlapců ze 30-ti je zřejmě:

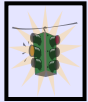
$$n_1 = C_5(30) = \binom{30}{5} = \frac{30!}{(30-5)!5!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 142506$$

Počet možností jak vybrat 5 dívek z 50-ti je zřejmě

$$n_2 = C_5(50) = \binom{50}{5} = \frac{50!}{(50-5)!5!} = \frac{50.49.48.47.46}{5.4.3.2.1} = 2118760$$

A celkový počet možností jak sestavit družstvo je tedy:

$$n = n_1 \cdot n_2 = 142506 \cdot 2118760 = 301.936012560, \text{ tj. téměř 302 miliard.}$$



Řešený příklad:

Z dvacetičlenného zastupitelstva (8 z ODS, 6 z ČSSD, 4 z KDU-ČSL, 2 ze SZ) se musí zvolit pětičlenné předsednictvo (předseda, místopředseda, 3 členové). Kolika různými způsoby lze předsednictvo sestavit:

- nejsou-li na výběr funkcí žádná další omezení
- je-li stanoveno, že předseda a místopředseda musí být ze dvou nejsilnějších stran

Řešení:

- Nejsou-li stanovena žádná omezení pro výběr předsednictva, je $380 (= 20 \cdot 19 = V_2(20))$ možností jak vybrat předsedu a místopředsedu. Zbýlá tři místa v předsednictvu mohou obsadit libovolní tři lidé ze zbývajících osmnácti. Takových možností je:

$$C_3(18) = \frac{18!}{(18-3)!3!} = \frac{18!}{15!3!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} = 816$$

Uplatníme-li kombinatorické pravidlo součinu, zjistíme že celkový počet možností, jak sestavit předsednictvo je 310080 ($= 380 \cdot 816$). V tomto případě tedy existuje 310080 možností jak sestavit předsednictvo zastupitelstva.

- Nyní je stanoveno, že předseda a místopředseda musí být ze dvou nejsilnějších stran (není řečeno, že předseda musí být z nejsilnější strany). Možností jak zvolit předsedu a místopředsedu je tedy:

$$8 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 96$$

Počet možností, jak zvolit předsedu z ODS a zároveň místopředsedu z ČSSD

Počet možností, jak zvolit předsedu z ODS a zároveň místopředsedu z ČSSD

Zbýlá tři místa v předsednictvu mohou obsadit libovolní tři lidé ze zbývajících osmnácti (bez ohledu na stranickou příslušnost). Takových možností je 816, jak bylo určeno v bodě a).

Uplatníme-li opět kombinatorické pravidlo součinu, zjistíme že celkový počet možností, jak v případě takovýchto požadavků sestavit předsednictvo je $78336 (= 96 \cdot 816)$.



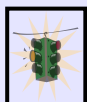
Výklad:

0.4.2 Kombinace k-té třídy s opakováním

nazvěme každou k-člennou skupinu sestavenou z prvků množiny M tak, že se prvky ve skupině mohou opakovat a přitom nezáleží na jejich pořadí.

Počet kombinací k-té třídy s opakováním je dán vztahem:

$$C'_k(n) = C_k(n+k-1) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$



Řešený příklad:

Kvalita výrobku se rozlišuje třemi stupni jakosti: A, B, C.

- Určete kolik různých výsledků může mít výstupní kontrola výroby, testuje-li se kvalita 10-ti náhodně vybraných vzorků.
- Kolik různých výsledků nebude obsahovat ani jeden výrobek kvality C?

Řešení:

- Testovaný vzorek je 10-ti prvková skupina složená z výrobků tří typu jakosti. Počet různých výsledků kontroly je tedy dán vztahem:

$$C'_{10}(3) = \binom{3+10-1}{10} = \frac{(12)!}{(12-10)! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

Existuje 66 různých výsledků kontroly kvality 10-ti výrobků.

- Chceme-li zjistit, kolik výběrů 10-ti výrobků neobsahuje výrobek kvality C, musíme omezit počet povolených tříd ve vzorku na 2 (A, B).

$$C'_{10}(2) = \binom{2+10-1}{10} = \frac{(11)!}{(2-1)! \cdot 10!} = \frac{11}{1} = 11$$

V 11-ti různých výsledcích kontroly kvality nenajdeme výrobek kvality C.



Shrnutí:

Uspořádané výběry	Bez opakování	Variace bez opakování	$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
		Permutace bez opakování	$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$
	S opakováním	Variace s opakováním	$V_k'(n) = n^k$
		Permutace s opakováním	$P'_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{P(n)}{P(n_1)P(n_2)\dots P(n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$
Neuspořádané výběry	Bez opakování	Kombinace bez opakování	$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
	S opakováním	Kombinace s opakováním	$C_k'(n) = C_k(n+k-1) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$

- **Kombinatorické pravidlo o součinu**

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

- **Kombinatorické pravidlo o součtu**

Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, \dots, p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.



Otázky

1. Co je to kombinatorika?
2. Jaká kritéria rozlišení výběru v kombinatorice znáte?
3. Definujte:
 - a) variace bez opakování
 - b) variace s opakováním
 - c) permutace bez opakování
 - d) permutace s opakováním
 - e) kombinace bez opakování
 - f) kombinace s opakováním



Úlohy k řešení

1. Z kolika prvků lze vytvořit 90 variací druhé třídy (bez opakování) ?
2. Z kolika prvků lze vytvořit 55 kombinací druhé třídy (bez opakování) ?
3. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací (bez opakování) čtyřicetdvakrát. Určete počet prvků.
4. Z kolika prvků lze vytvořit padesátkrát více variací třetí třídy (bez opakování) než variací druhé třídy (bez opakování) ?
5. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit:
 - a) 10 pohlednic,
 - b) 5 pohlednic,
 - c) 5 různých pohlednic
6. V knihkupectví prodávají 10 titulů knižních novinek. Kolika způsoby lze koupit
 - a) 4 knižní novinky,
 - b) 5 různých knižních novinek?
7. Na hokejovém turnaji, kterého se účastní 8 družstev, sehraje každý tým s ostatními právě 1 utkání. Kolik zápasů bude celkem sehráno?
8. Z 5 bílých a 4 červených kuliček tvoříme trojice tak, aby v každé trojici byly vždy 2 bílé a 1 červená kulička. Kolik trojic splňujících tuto podmínku lze vytvořit?
9. Hokejový tým odjel na OH s 23 hráči, a to s 12 útočníky, 8 obránci a 3 brankáři. Kolik různých sestav může trenér teoreticky vytvořit?
10. Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže:
 - a) žádné tři z nich neleží v přímce,
 - b) tři z nich leží v jedné přímce?
11. Kolik kružnic je určeno 10 body v rovině, jestliže žádné tři z nich neleží na přímce a žádné čtyři z nich neleží na kružnici?
12. Kolik různých hodů můžeme provést
 - a) dvěmi,
 - b) třemi různobarevnými kostkami?
13. Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky ve skupiny po jedné až pěti?

14. Kolik prvků obsahuje množina všech pěticiferných přirozených čísel?
15. Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?
16. Kolikrát více je variací k-té třídy z n prvků než kombinací k-té třídy z těchto prvků (bez opakování) ?
17. V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.
 - a) Kolika způsoby je lze přesadit?
 - b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?
 - c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?
 - d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?
18. Student má v knihovně 4 různé učebnice pružnosti, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?
19. Kolika způsoby lze rozdělit 8 účastníků finále v běhu na 100 m do 8 drah?
20. Kolik různých permutací lze vytvořit použitím všech písmen slova
 - a) statistika,
 - b) matematika?
21. Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?
22. Kolik úhlopříček má konvexní n-úhelník?
23. V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.
24. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat 3 pole tak, aby všechna tři pole neměla stejnou barvu?
25. Kolika způsoby je možno na šachovnici s 64 poli vybrat 3 pole tak, aby všechna neležela v jednom sloupci?



Řešení:

1. $n = 10$
2. $n = 11$
3. $n = 7$
4. $n = 52$
5. a) 8 008 možností
b) 462 možností
c) 21 možností
6. a) 715 možností
b) 252 možností
7. 28 zápasů
8. 40 možností
9. 18 480 možností
10. a) 21 přímkami
b) 19 přímkami
11. 120 kružnic
12. a) 36 různých hodů
b) 216 různých hodů
13. 62 různých značek
14. 90 000 čísel
15. 90 pohledů
16. Variací je $k!$ krát více než kombinací
17. a) 720 možností
b) 240 možností
c) 240 možností
d) 96 možností
18. 1728 způsobů
19. 40 320 způsobů

20. a) 75 600 přesmyček
 b) 151 200 přesmyček

21. 10 vojáků

22. $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček

23. 231 možností

24. 31 744 možností

25. 41 216 možností