ŘEŠENÍ

Maturita V POHODĚ

MATEMATIKA

Příprava na maturitní zkoušku

Obsah

Řešení

- VERZE 2023 2
- VERZE 2018–2022 119
- VERZE 2017 236

Vydavatelství Taktik

ŘEŠENÍ

(VERZE 2023)

ŘEŠENÍ – ČÍSELNÉ OBORY

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 16,4

2 $-\frac{9}{4}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{2}$

3 9

4 $\frac{37}{4}$

5 $b : c = 8 : 9$

6 620 kg

7 Přibližně o 53,3 %.

8

9 24

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $\frac{20 \cdot 72 \cdot 225}{25 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Důraz klademe na krácení, poté rozložíme na součin mocnin prvočísel a využijeme věty o počítání s mocninami.

2 $n(10, 12, 15) = 60$
Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

60 : 10 = 6
60 : 12 = 5
60 : 15 = 4

Do krychle se vejde 6 · 5 · 4 = 120 krabiček.

Představíme si kvádry, které jsou seskládány do krychle. Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

3 Součin čísel 12 a 25 je 2 · 2 · 3 · 5 · 5.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo n je dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo n je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo n není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo n je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo n je nejmenší společný násobek čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek. Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

4

		A	N
4.1	2 je prvočíslo.	■	□
4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	■	□
4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	□	■

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

5

5.1 15 = 3 · 5; 20 = 2 · 2 · 5; n(15; 20) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60

5.2 150 = 2 · 3 · 5 · 5; 180 = 2 · 2 · 3 · 3 · 5; D(150; 180) = 2 · 3 · 5 = 30

5.3 10 = 2 · 5; 25 = 5 · 5; n(10; 25) = 2 · 5 · 5 = 50

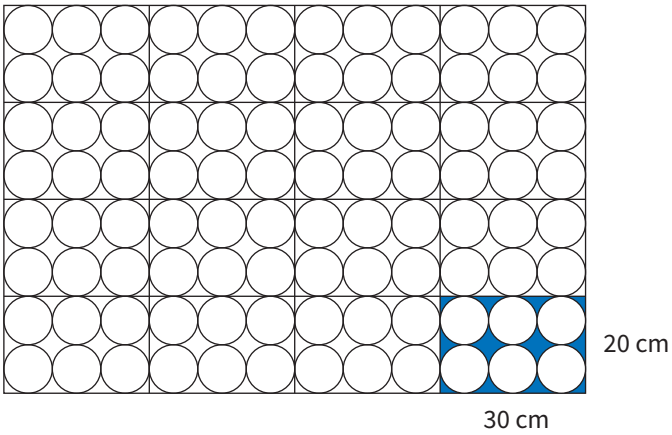
5.4 100 = 2 · 2 · 5 · 5; 160 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5; D(100; 160) = 2 · 2 · 5 = 20

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50
F) 60

5.1. **F**
5.2. **C**
5.3. **E**
5.4. **B**

Ověřujeme znalost výpočtu nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

6 Krabice lze na paletu umístit po celé délce i šířce (na orientaci nezáleží). Na paletě je $6 \cdot 16 = 96$ koulí.



Rozměr a počet krabic nemají pro výpočet zásadní smysl. Slouží pouze pro upevnění koulí a vizualizaci úlohy. Určíme počet koulí, které lze umístit do jedné krabice (známe poloměr koule) a vynásobíme počtem krabic.

7 Průměrná hodnota $\frac{8+6+5+5+6}{5}\,°C = \frac{30}{5}\,°C = 6\,°C$

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

8 $\frac{(-1)\cdot|-2|}{(-3)} \cdot \frac{(-5+4)}{|-5+4|} = \frac{(-1)\cdot 2}{(-3)} \cdot \frac{(-1)}{1} = -\frac{2}{3}$

A) $\frac{2}{3}$

B) -2

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) $-\frac{2}{3}$

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

9

9.1 Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná. — A ■ N □

9.2 Součin lichého počtu záporných čísel je záporný. — A □ N ■

9.3 Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný. — A □ N ■

Klademe důraz na správné přečtení zadání.

9.1 Rozlišíme pojmy kladné a nezáporné číslo (resp. záporné a nekladné číslo).

9.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

10 10.1 $(-2) + 3 = 1$

10.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2$

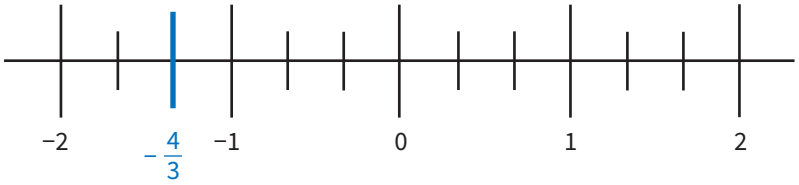
10.3 $(-2) \cdot (-1^2) = 2$

10.4 $(-3) - (-2) = -1$

A)	−1	10.1	**D**
B)	−2	10.2	**B**
C)	−5	10.3	**E**
D)	1	10.4	**A**
E)	2		
F)	5		

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze 10.2 a 10.3 je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1)^2 = -1$.
Úlohu 10.4 lze řešit jako rozdíl dvou záporných čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

11 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose. Číselná osa pomáhá vyznačit správný počet třetin.

12 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{2}{3}+2}{2} = \dfrac{1}{\frac{2+1}{2}} + \dfrac{\frac{2+6}{3}}{2} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} + \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

13 35 ... 100 % ⇒ 50 ... 143 % – změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, co je základ tedy, kolik je 100 %. Řešíme pomocí trojčlenky nebo také výpočtem 1 %.

14 14.1 12 395 ≐ 12 000 — A ■ N □

14.2 na stovky 12 395 ≐ 12 400 — A ■ N □
na desítky 12 395 ≐ 12 400

14.3 12 395 = 12 395 – zůstane stejné — A □ N ■

V úloze 14.2 porovnáme oba výsledky zaokrouhlení.
Úloha 14.3 může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“.
Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

15 15.1 $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S$

15.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C$

15.3 $l' : l = 5 : 10 \Rightarrow l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l$

15.4 1 hod = 60 min ... 100 % ⇒ 75 min ... 125 % – změna 25 %

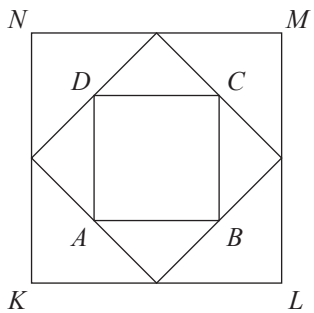
Úloha 15.1 může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah. Úloha 15.2 je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina. V úloze 15.4 žák nejprve převede základ 1 hod na 60 minut.

A) 25 %
B) 50 %
C) 75 %
D) 100 %
E) 125 %
F) 175 %

15.1. **E**
15.2. **C**
15.3. **B**
15.4. **A**

16 Platí pro každé reálné číslo.

17 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$, poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční“ a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

18 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 ..... 100 %
3 ..... x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 %.

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

A) 22,5 %
B) 25 %
C) 30 %
D) 33 %
E) 56 %

19 19.1 Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění. A ☐ N ■

19.2 Absolutní hodnota nuly je nula, správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná. A ☐ N ■

19.3 Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné. A ■ N ☐

Úloha 19.1 může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha 19.2 vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha 19.3 může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

20 20.1 $(\sqrt{2})^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

20.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

20.3 $-\sqrt{4} = -2$

20.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

A) -2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

D) 2

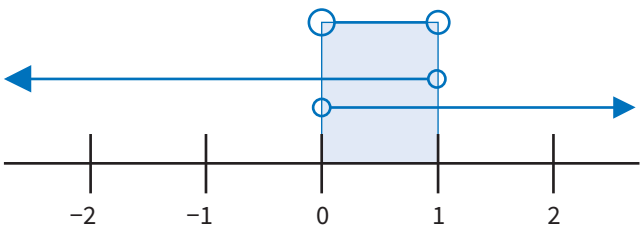
E) 4

F) neexistuje

20.1	**E**
20.2	**D**
20.3	**A**
20.4	**C**

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

21



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; ...).

22 $A = R_0^+/\{1\}$ nebo $A = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha 21). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

23 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5)$

A) $(-1; 2)$
B) $(-\infty; \infty)$
C) $(-\infty; 2\rangle$
D) $\langle -1; 5\rangle$
E) $(-1; 5)$

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalů A, B a C na číselné ose.

24

		A	N
24.1	$Z^+ \subset R^+ \Rightarrow Z^+ \cap R^+ = Z^+$	■	□
24.2	$(-1; +1) \subset \langle -1; +1\rangle$	□	■
24.3	$N \subset R$	■	□

Úlohy 24.1 a 24.3 ověřují znalosti číselných množin. V úloze 24.2 je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

25 **Přiřaďte ke každé množině správný interval.**

25.1 $R^+ = (0; \infty)$

25.2 $R^- \cap R^+ = \emptyset = (0; 0)$

25.3 $R_0^- \cup R_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty)$

25.4 $R_0^- \setminus \{0\} = R^- = (-\infty; 0)$

A) $(1; \infty)$
B) $(0; 0)$
C) $(-\infty; \infty)$
D) $\langle 0; 0\rangle$
E) $(-\infty; 0)$
F) $(0; \infty)$

25.1	**F**
25.2	**B**
25.3	**C**
25.4	**E**

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověď A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy 21 a 22).

ŘEŠENÍ – ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $-a+3$

2 $b\ \frac{11}{2}$

3
3.1 B
3.2 D
3.3 A

4 $(-a^3+5)^2 = a^6 - 10a^3 + 25$

Kvadratický člen v mnohočlenu chybí, tzn. že koeficient je roven 0.

5 $-\frac{18}{k(k+3)}$

6 $(1+2\sqrt{3}-x)(1+x)$

7 E

8
8.1 D
8.2 B
8.3 E

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\\[2ex] x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+3}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{4}-1+3}{\frac{1+2}{2}}=\frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+2\cdot 4}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+8}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

2 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2-2x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve −3 a potom 1.

$$A=-\frac{4(-3)}{(-3)^2-4}=-\frac{-12}{9-4}=\frac{12}{5}$$

$$B=-\frac{4\cdot 1}{1^2-4}=-\frac{4}{1-4}=\frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\cancel{12}^{3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku...

$\frac{4}{3}$ ..... *100 %*

$\frac{12}{5}$ ..... *x %*

x = 180 %

... tedy o 80% větší.

3 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$$x^2-x-6\neq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1\neq\frac{1+5}{2}\Rightarrow x_1\neq 3$$

$$x_2\neq\frac{1-5}{2}\Rightarrow x_2\neq -2$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$

$$x^2-2x-3=2(x^2-x-6)$$

$$x^2-2x-3=2x^2-2x-12$$

$$-x^2=-9$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x=\pm 3$, ale hodnota $x=3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru.
Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x=-3$.

4 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

4.1

$$\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \qquad \text{B)}$$

4.2

$$\frac{x-1}{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow x \neq 0 \wedge x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1 \qquad \text{D)}$$

4.3

$$\frac{x+1}{\frac{x-1}{x}} \Rightarrow x-1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 0 \qquad \text{C)}$$

5 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(a^2-2)^2-(4-a^2)^2-4 = \left[(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 2+2^2\right]-\left[4^2-2\cdot 4\cdot a^2+(a^2)^2\right]-4 = a^4-4a^2+4-(16-8a^2+a^4)-4 =$$

$$= a^4-4a^2+4-16+8a^2-a^4-4 = 4a^2-16 = 4(a^2-4) = 4(a-2)(a+2)$$

6 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x + 0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x + 0{,}5x$	$0{,}5p(x + 0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x + 0{,}5x)$	$0{,}2p\cdot 2(x + 0{,}5x)$

$$0{,}3px + 0{,}5p(x+0{,}5x) + 0{,}2p\cdot 2(x+0{,}5x) = 0{,}3px + 0{,}5px + 0{,}25px + 0{,}4px + 0{,}2px = 1{,}65px \qquad \text{D)}$$

7 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$$(a+2)^3+(a-2)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3+a^3-3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2-2^3 = a^3+6a^2+12a+8+a^3-6a^2+12a-8 =$$

$$= 2a^3+24a = 2a(a^2+12)$$

8 $3a^2x - 6ax - 2a^2y + 4ay = 3ax(a-2) - 2ay(a-2) = (a-2)(3ax - 2ay) = a(a-2)(3x-2y)$

9 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x):B(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - x - 6):(x^2 + x - 3) = x + 2 \\
\underline{-x^3 - x^2 + 3x} \\
\quad 2x^2 + 2x - 6 \\
\quad \underline{-2x^2 - 2x + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

B) $A(x) = (x+2)\cdot B(x)$

10 10.1 A N

Postupujeme dle vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, kde $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

10.2 A N

$$(3x+3)^2 + (4x+4)^2 = 9x^2 + 18x + 9 + 16x^2 + 32x + 16 = 25x^2 + 50x + 25 = (5x+5)^2$$

10.3 A N

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$$

10.4 A N

$$(x+2)^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 5 = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

11 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$

$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$

$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$

$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$

$$(x-1)^2 = A^2(x)$$

$A(x) = x - 1$ D)

12 $\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)=\frac{x(x-2)+x(x+2)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x\cdot x-4}{x}=\frac{x^2-2x+x^2+2x}{\cancel{x^2-4}}\cdot\frac{\cancel{x^2-4}}{x}=\frac{2\cancel{x^2}^{2x}}{\cancel{x}}=2x$

podm.: $x\neq\pm2;\ x\neq0$

13 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)=\left[\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{a-1-2a}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{-a-1}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=$

$=\frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{-\cancel{(a-1)}}{a}=\frac{1}{a}$

podm.: $a\neq\pm1;\ a\neq0$

14 $\frac{1+\frac{1}{a-2}}{a-\frac{1}{2-a}}=\frac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{-\frac{(a-1)^2}{2-a}}=\frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}}\cdot\left[-\frac{\cancel{2-a}}{\cancel{(a-1)^2}^{1-a}}\right]=\frac{1}{a-1}$

podm.: $a\neq1;\ a\neq2$

15 $1+\frac{1}{1+\frac{1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a}{a-1}}=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{a-1}{a}=1+\frac{a-1}{a}=\frac{a+a-1}{a}=\frac{2a-1}{a}$ B)

16 Výraz není definován pro takové $x\in\mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x}}\Rightarrow1+\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq-2\wedge x\neq0$

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1+\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2+2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+4}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq-4\wedge x\neq-2$

$\frac{x+2}{1+\frac{4}{x-2}}\Rightarrow1+\frac{4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x-2+4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x-2}\neq0\Rightarrow x\neq\pm2$ C)

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1-\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2-2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq0\wedge x\neq-2$

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x}}\Rightarrow1-\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x-2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq2\wedge x\neq0$

17 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

17.1 A N

$$\frac{A(a)}{B(a)} = \frac{\frac{2a}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}} = \frac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \frac{2}{a-1}$$

17.2 A N

$$\frac{B(a)}{A(a)} + 1 = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{2a}{a^2-1}} + 1 = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \frac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \frac{a-1}{2} + 1 = \frac{a-1+2}{2} = \frac{a+1}{2}$$

17.3 A N

$$A(a) - B(a) = \frac{2a}{a^2-1} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{3a-a^2}{a^2-1}$$

17.4 A N

$$A(a) + B(a) = \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a+1} = \frac{2a + a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \frac{a}{a-1}$$

18 $$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$$

popř.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1) + (x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$$

19 $$(\sqrt{x})^{-1} + (\sqrt{x})^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{x\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x}+x}{x \cdot x} = \frac{\cancel{x}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x^2}} = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

20 $\sqrt{x}+\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad /\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x}+1=2 \qquad /-1$$

$$\sqrt{2x}=1 \qquad /^2$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad \text{C)}$$

21 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$$V(a,b)=(a^{-16}b^{4})^{\frac{1}{8}}=a^{\overset{-2}{\cancel{-16}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}b^{\underset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}=a^{-2}b^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{b}}{a^2}$$

$$V(\sqrt{5},25)=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}^2}=\frac{5}{5}=1 \qquad \text{A)}$$

22 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

22.1

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2-x}}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1 \\ 2-x>0\Rightarrow 2>x \end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\langle -1;2) \qquad \text{E)}$$

22.2

$$\frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow 4-x^2>0\Rightarrow x^2<4\Rightarrow |x|<2\Rightarrow x\in(-2;2) \qquad \text{D)}$$

22.3

$$\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\Rightarrow\frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

$$(x+2\geq 0\wedge x+1>0)\vee(x+2\leq 0\wedge x+1<0)$$

$$(x\geq -2\wedge x>-1)\vee(x\leq -2\wedge x<-1)$$

$$x\in(-1;\infty) \qquad x\in(-\infty;-2\rangle$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty;-2\rangle\cup(-1;\infty) \qquad \text{A)}$$

ŘEŠENÍ – ROVNICE A NEROVNICE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 B

2 $K = (-\infty; 10\rangle$

3 $x \neq 3$, $K = \{0\}$

4 Úkol bude splněn po 21 dnech.

5
5.1 A
5.2 A
5.3 A
5.4 A

6 D

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich *x-ová* a *y-ová* souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [3; a] \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \Rightarrow 9 + 2a = 5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$
$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [b; 4] \Rightarrow 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \Rightarrow 3b + 8 = 5 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$
$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

$$x = 10 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 10): \dfrac{10^2 - 3}{\sqrt{10 - 1}} = \dfrac{100 - 3}{\sqrt{9}} = \dfrac{97}{3} = 32\,\dfrac{1}{3} \\ P\,(x = 10): \dfrac{10}{2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 10) \neq P\,(x = 10)$$

$$x = 5 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 5): \dfrac{5^2 - 3}{\sqrt{5 - 1}} = \dfrac{25 - 3}{\sqrt{4}} = \dfrac{22}{2} = 11 \\ P\,(x = 5): \dfrac{5}{2} = 2{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 5) \neq P\,(x = 5)$$

$$x = 4 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 4): \dfrac{4^2 - 3}{\sqrt{4 - 1}} = \dfrac{16 - 3}{\sqrt{3}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}} \\ P\,(x = 4): \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 4) \neq P\,(x = 4)$$

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 2): \dfrac{2^2 - 3}{\sqrt{2 - 1}} = \dfrac{4 - 3}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ P\,(x = 2): \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 2) = P\,(x = 2)$$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 1): \dfrac{1^2 - 3}{\sqrt{1 - 1}} = \dfrac{1 - 3}{\sqrt{0}} \quad \text{výraz není definován} \\ P\,(x = 1): \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pro } x = 1 \text{ rovnice není definována}$$

Z provedené zkoušky plyne, že řešením rovnice je $x = 2$. D)

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$$\begin{aligned} 32 + x &= 0{,}96\,(x + 35) \\ 32 + x &= 0{,}96x + 33{,}6 && / -0{,}96x - 32 \\ 0{,}04x &= 1{,}6 && / : 0{,}04 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. 20 % hmotnosti vody ($0{,}2x$) třetina zbytku

hmotnost vody v sudu x

$$135 - 0{,}2x - \frac{1}{2} \cdot 0{,}8x = 79 \qquad / \cdot 3$$
$$405 - 0{,}6x - 0{,}8x = 237 \qquad / \cdot -405$$
$$-1{,}4x = -168 \qquad / : (-1{,}4)$$
$$x = 120$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$l = l_1\,[1 + \alpha(t - t_1)]$$
$$l = l_1 + l_1\alpha(t - t_1)$$
$$l = l_1 + l_1\alpha t - l_1\alpha t_1 \qquad / -l_1 + l_1\alpha t_1$$
$$l - l_1 + l_1\alpha t_1 = l_1\alpha t \qquad / : l_1\alpha$$
$$\frac{l - l_1 + l_1\alpha t_1}{l_1\alpha} = t$$

6 6.1 A ☐ N ■

Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in R$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$. Tvrzení tedy pravdivé není.

6.2 A ■ N ☐

Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 1$$
$$\frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} = 1$$
$$x - 2 = 1 \qquad / + 2$$
$$x = 3$$

6.3 A ■ N ☐

Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in R$. Tvrzení je tedy pravdivé.

6.4 A ■ N ☐

Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnic a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a −2. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad / -x - 2$$
$$x^2 - 4 - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

7

$$\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} = 2x - 4 \qquad / \cdot 6$$

$$3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) = 12x - 24$$

$$3x + 2x + \frac{2x+4}{3} = 12x - 24 \qquad / \cdot 3$$

$$9x + 6x + 2x + 4 = 36x - 72$$

$$17x + 4 = 36x - 72 \qquad / -36x - 4$$

$$-19x = -76 \qquad / : (-19)$$

$$x = 4$$

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$2x + y = -3$$

$$x - 2y = -4 \qquad / \cdot 2$$

$$2x + y = -3$$

$$2x - 4y = -8$$

$$4x - 3y = -11$$ D)

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$(x + 3)^2 - 4(x - 1)^2 - 2x = -3(x - 2)^2 + 6x - 1$$

$$x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1) - 2x = -3(x^2 - 4x + 4) + 6x - 1$$

$$x^2 + 6x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 - 2x = -3x^2 + 12x - 12 + 6x - 1$$

$$-3x^2 + 12x + 5 = -3x^2 + 18x - 13 \qquad / +3x^2 - 18x - 5$$

$$12x - 18x = -13 - 5$$

$$-6x = -18 \qquad / : (-6)$$

$$x = 3$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. C)

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x+2}{x^2+x} - 1 \qquad \text{podm.: } x \neq 0;\ x \neq -1$$

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x+2}{x(x+1)} - 1 \qquad / \cdot x(x+1)$$

$$2(x+1) - x \cdot x = 3x + 2 - x(x+1)$$

$$2x + 2 - x^2 = 3x + 2 - x^2 - x$$

$$-x^2 + 2x + 2 = -x^2 + 2x + 2 \qquad / -x^2 + 2x + 2$$

$$0 = 0$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in R - \{-1; 0\}$.

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím menší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci ..... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků ..... x hodin

$$\frac{6}{4} = \frac{x+2{,}5}{x} \qquad / \cdot 4x$$

$$6x = 4(x+2{,}5)$$

$$6x = 4x + 10 \qquad / -4x$$

$$2x = 10 \qquad / : 2$$

$$x = 5$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků ..... 5 hodin
10 soustružníků ..... y hodin

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{y} \qquad / \cdot 6y$$

$$10y = 30 \qquad / : 10$$

$$y = 3$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, $0{,}75x$. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku ..... $0{,}75x$
jmenovatel zlomku x

$$\frac{0{,}75x+2}{x+2}=0{,}8 \qquad / \cdot (x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8x+1{,}6 \qquad / -0{,}8x-2$$
$$-0{,}05x=-0{,}4 \qquad / : (-0{,}05)$$
$$x=8$$

Čitatel původního zlomku je roven 8, jmenovatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. 0,75 · 8 = 6.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

13 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x^2-4}+2 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 2$$
$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{(x-2)(x+2)}+2 \qquad | \cdot (x-2)(x+2)$$
$$2(x+2)+x(x-2)=3+2(x-2)(x+2)$$
$$2x+4+x^2-2x=3+2(x^2-4)$$
$$x^2+4=3+2x^2-8$$
$$x^2+4=2x^2-5 \qquad | -2x^2-4$$
$$-x^2=-9 \qquad | \cdot (-1)$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3$$
$$K=\{\pm 3\}$$

14 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-1}{x+9} \qquad / \cdot (x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x \neq -3;\ x \neq -9$$
$$(x-2)(x+9)=(x-1)(x+3)$$
$$x^2+9x-2x-18=x^2+3x-x-3$$
$$x^2+7x-18=x^2+2x-3 \qquad / -x^2-2x+18$$
$$5x=15 \qquad / : 5$$
$$x=3$$

$$\frac{y-3}{y+3}=\frac{y-4}{y-1} \qquad / \cdot (y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y \neq -3;\ y \neq 1$$
$$(y-1)(y-3)=(y-4)(y+3)$$
$$y^2-3y-y+3=y^2+3y-4y-12$$
$$y^2-4y+3=y^2-y-12 \qquad / -y^2+y-3$$
$$-3y=-15 \qquad / : (-3)$$
$$y=5$$

Řešením rovnic jsou čísla $x = 3$ a $y = 5$. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15. B)

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

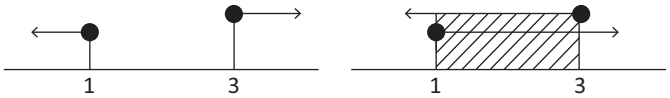
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, jestliže $(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$$

$$(x \geq 3 \wedge x \leq 1) \vee (x \leq 3 \wedge x \geq 1)$$

$$x \in \emptyset \vee x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku ..... $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$$x(x + 17{,}5) = 375$$

$$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1806{,}25}}{2} =$$

$$= \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \text{ nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka 12,5 + 17,5 = 30 cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1056{,}25} = 32{,}5 \text{ cm}$. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x + 1$ (druhá mocnina je $(x + 1)^2$) a největší $x + 2$ (druhá mocnina je $(x + 2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo ..... $x+1$
třetí číslo ..... $x+2$

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 10(x+2)$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 20$$
$$3x^2 + 6x + 5 = 10x + 20 \qquad / - 10x - 20$$
$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} =$$
$$= \frac{4 \pm 14}{6}$$
$$x_1 = \frac{4 + 14}{6} = \frac{18}{6} = 3$$
$$x_2 = \frac{4 - 14}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \text{ nevyhovuje } (x \text{ je přirozené číslo})$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je 3 + 4 + 5 = 12.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$(x+3)^2 - (3x-1)^2 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - (9x^2 - 6x + 1) = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$-8x^2 + 12x + 8 = 0 \qquad / : (-4)$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x_1| = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow |x_2| = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_2| = 4|x_1|$$

E)

19 Je-li $x_1 = 3$ řešením rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ x_1 = 3 \end{array}\right\} 3^2 - 3 - b^2 + 5b = 0 \Rightarrow b^2 - 5b - 6 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$b_1 = \frac{5 - 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Nyní do původní rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ b_1 = -1 \end{array}\right\} x^2 - x - (-1)^2 + 5(-1) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{2}} = -2$$

$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven −2. B)

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2} = |x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x - a| \leq b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a - b; a + b \rangle$.

20.1 $(x - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow |x - 1| \leq 1 \Rightarrow x \in \langle 0; 2 \rangle$ C)

20.2 $(x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -3; 1 \rangle$ A)

20.3 $(x + 1)^2 \leq 9 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 3 \Rightarrow x \in \langle -4; 2 \rangle$ D)

21 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 3(2x - 1) - 2(x + 3) &\leq 5x - 1 \\ 6x - 3 - 2x - 6 &\leq 5x - 1 \\ 4x - 9 &\leq 5x - 1 \quad / -5x + 9 \\ 4x - 5x &\leq -1 + 9 \\ -x &\leq 8 \quad / : (-1) \\ x &\geq -8 \Rightarrow x \in \langle -8; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4x - 3) - 5(x + 2) &\geq 4x - 13 \\ 8x - 6 - 5x - 10 &\geq 4x - 13 \\ 3x - 16 &\geq 4x - 13 \quad / -4x + 16 \\ 3x - 4x &\geq -13 + 16 \\ -x &\geq 3 \quad / : (-1) \\ x &\leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \langle -8; \infty) \\ x \in (-\infty; -3\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle -8; -3 \rangle$$

22 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x - 1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)(\cancel{x+1})} \leq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$1 \geq 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$$

23 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$2(3x-1) - 3[2(x+4) - 3(x-2)] \leq 7(x-5) + 1$$

$$6x - 2 - 3[2x + 8 - 3x + 6] \leq 7x - 35 + 1$$

$$6x - 2 - 3[-x + 14] \leq 7x - 34$$

$$6x - 2 + 3x - 42 \leq 7x - 34$$

$$9x - 44 \leq 7x - 34 \qquad / -7x + 44$$

$$9x - 7x \leq -34 + 44$$

$$2x \leq 10 \qquad / : 2$$

$$x \leq 5$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \leq 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
Řešení je tedy D.

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\frac{2x - \frac{1}{3}(x+4)}{4} + \frac{3x - \frac{1}{4}(x-2)}{3} \leq \frac{3x+1}{2} \qquad | \cdot 12$$

$$3\left[2x - \frac{1}{3}(x+4)\right] + 4\left[3x - \frac{1}{4}(x-2)\right] \leq 6(3x+1)$$

$$6x - (x+4) + 12x - (x-2) \leq 18x + 6$$

$$6x - x - 4 + 12x - x + 2 \leq 18x + 6$$

$$16x - 2 \leq 18x + 6 \qquad | -18x + 2$$

$$-2x \leq 8 \qquad | : (-2)$$

$$x \geq -4 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -4; \infty) \qquad \text{A)}$$

A)

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

25.1
$$\begin{aligned} 2(3x-1)-3(x+2) &\le 4x-6 \\ 6x-2-3x-6 &\le 4x-6 \\ 3x-8 &\le 4x-6 && \mid -4x+8 \\ 3x-4x &\le -6+8 \\ -x &\le 2 && \mid :(-1) \\ x &\ge -2 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -2; \infty) && \text{B)} \end{aligned}$$

25.2
$$\begin{aligned} 4(2x-3)-2(x+1) &\le 7x-8 \\ 8x-12-2x-2 &\le 7x-8 \\ 6x-14 &\le 7x-8 && \mid -7x+14 \\ 6x-7x &\le -8+14 \\ -x &\le 6 && \mid :(-1) \\ x &\ge -6 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -6; \infty) && \text{E)} \end{aligned}$$

25.3
$$\begin{aligned} 4(3x-2)-6(x-3) &\le 7x+15 \\ 12x-8-6x+18 &\le 7x+15 \\ 6x+10 &\le 7x+15 && \mid -7x-10 \\ 6x-7x &\le 15-10 \\ -x &\le 5 && \mid :(-1) \\ x &\ge -5 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -5; \infty) && \text{D)} \end{aligned}$$

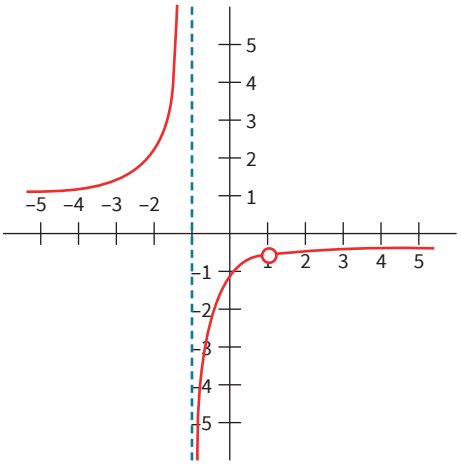
ŘEŠENÍ – FUNKCE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 C

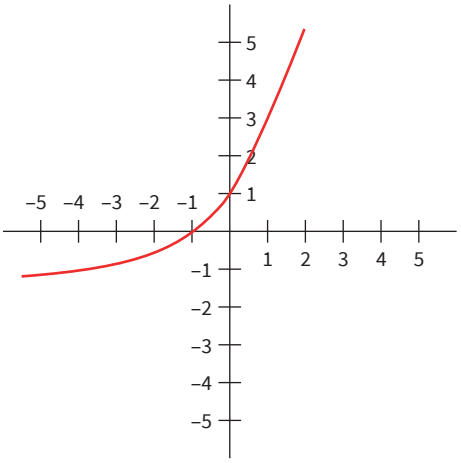
2 $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Grafem je hyperbola s výjimkou jednoho bodu (x = 1)



3 $K = \{4\}$

4 $P_x[-1; 0]$, $P_y[0; 1]$



5 $K = \{1\}$

6 $a = -4$

7 $\log_5 6 = \frac{p}{3} + \frac{q}{2}$

8 $K = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

Proto musí platit, že: $\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \Rightarrow x \in (3; 5\rangle$

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f: y = \frac{|x-3|}{2x} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

4

4.1. $f_1: y = \frac{2}{|x| - 3} \Rightarrow |x| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq \pm 3$ — A ☐ N ■

4.2. $f_2: y = \frac{x}{x^2 + 3} \Rightarrow x^2 + 3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ — A ■ N ☐

4.3. $f_3: y = \frac{2x + 2}{x + 1} \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ — A ☐ N ■

4.4. $f_4: y = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{2}} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ — A ■ N ☐

5 $A[0; 0]$: $\frac{0^2+0}{0-1} = 0 \Rightarrow$ bod $A[0; 0]$ leží

$B[-1; 0]$: $\frac{(-1)^2+(-1)}{(-1)-1} = \frac{1-1}{-2} = 0 \Rightarrow$ bod $B[-1; 0]$ leží

$C[2; 6]$: $\frac{2^2+2}{2-1} = \frac{4+2}{1} = 6 \Rightarrow$ bod $C[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $\frac{(-3)^2+(-3)}{(-3)-1} = \frac{9-3}{-4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6{,}3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k,
vyjádříme pomocí lineární funkce:

$$p = 55 - \frac{6{,}3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0{,}063k + 55$

7 $v = at + b \Rightarrow \begin{cases} v_1 = at_1 + b \Rightarrow 337{,}92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \Rightarrow 350{,}12 = 30a + b \end{cases}$ řešením soustavy je $a = 0{,}61$ a $b = 331{,}82$

Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0{,}61t + 331{,}82$.

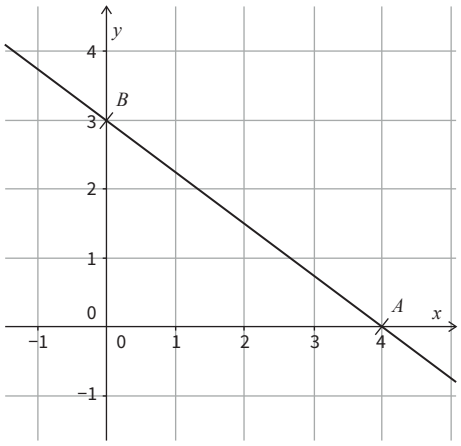
8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A[x; 0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B[0; y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge y = 0) \Rightarrow 0 = -0{,}75x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{0{,}75} = 4 \Rightarrow A[4; 0]$

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -0{,}75 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[0; 3]$

Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



9 Grafem funkce f je přímka, která se v osové souměrnosti podle osy x zobrazí opět na přímku. V osové souměrnosti podle osy x se funkční hodnoty původní funkce změní na hodnoty opačné, tzn. $g(x) = -f(x)$.

Proto $g: y = -x - 2$.

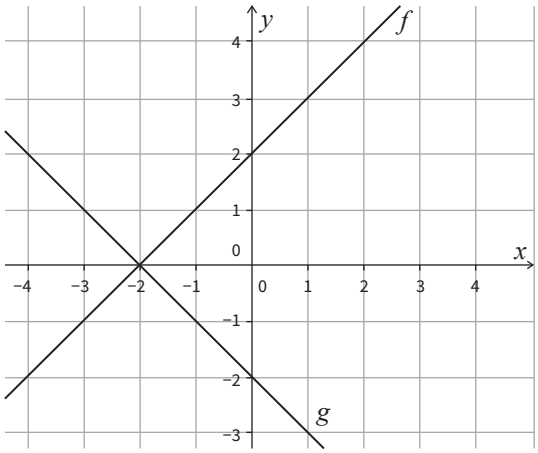
A) $g: y = x + 2$

B) $g: y = -x + 2$

C) $g: y = x - 2$

D) $g: y = -x - 2$

E) $g: y = \frac{1}{x+2}$



10 10.1 $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ **D**

10.2 $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ **B**

10.3 $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ **E**

11 $f: y = x - 2 \wedge P[x; 1] \in f \Rightarrow 1 = x - 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ funkce se protínají v bodě $P[3; 1]$

$g: y = ax + 4 \wedge P[3; 1] \in g \Rightarrow 1 = 3a + 4 \Rightarrow -3 = 3a \Rightarrow a = -1$

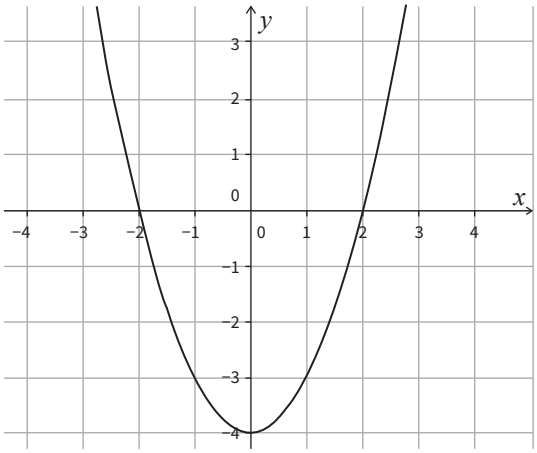
A) $a = -2$

B) $a = -1$

C) $a = -\frac{1}{2}$

D) $a = 1$

E) $a = 2$



12 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je −4, potom funkce prochází bodem $V[0; -4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice [2; 0], potom druhý má souřadnice [−2; 0].

Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}[2; 0]$ a $P_{x2}[-2; 0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f: y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

$V \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -4$
$P_{x1} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$
$P_{x2} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow 0 = 4a - 2b + c$

Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je $a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.
Pro funkci f tedy platí: $f: y = x^2 - 4$

13 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \wedge f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) + 3 = a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$f(a+1) \geq f(a)$

$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$

$2a \geq -3$

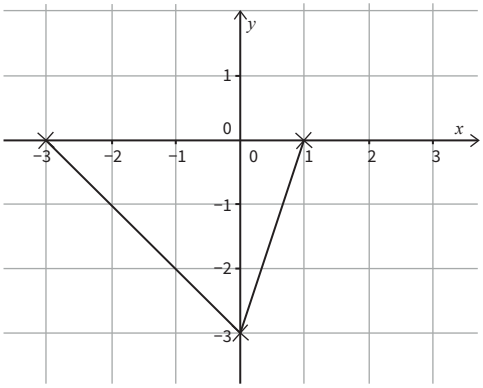
$a \geq -\frac{3}{2}$

$a \in \langle -3/2, \infty)$

14 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.

$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P_1[0; -3]$
$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge y = 0) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow (x = -3 \vee x = 1) \Rightarrow P_2[-3; 0] \wedge P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



15 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj. $f: y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$. V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí $g: y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$.

A) $g: y = x^2 + 4x - 3$

B) $g: y = x^2 - 4x + 3$

C) $g: y = -x^2 + 4x + 3$

D) $g: y = x^2 - 4x - 3$

E) $g: y = -x^2 - 4x + 3$

16 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 4 = a^{-1+1} + b \Rightarrow 4 = a^0 + b \Rightarrow 4 = 1 + b \Rightarrow b = 3$
$B[2; 11] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 11 = a^{2+1} + b \Rightarrow 11 = a^3 + 3 \Rightarrow 8 = a^3 \Rightarrow a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

17 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\frac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$

$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$

$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$

$$\frac{2}{a-1} > 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$a \in (1, \infty)$$

18 Exponenciální funkce $y = a^x$ je definována pro všechna $a \in R^+ - \{1\}$. U uvedených funkcí ověříme, zda základ a vyhovuje příslušné podmínce.

$f: y = (\cos 2\pi)^{x+1} \Rightarrow a = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$g: y = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{2x+1} \Rightarrow a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ vyhovuje podmínce, je exp. fce

$h: y = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4\right)^{x-1} \Rightarrow a = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$l: y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{x+3} \Rightarrow a = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

19

$$2^{3-x} + 2^{1-x} = 40$$
$$2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} = 40$$
$$2^{-x}(2^3 + 2^1) = 40$$
$$2^{-x}(8 + 2) = 40$$
$$2^{-x} \cdot 10 = 40$$
$$2^{-x} = 4$$
$$2^{-x} = 2^2$$
$$x = -2$$

A) $(-5; -3)$

B) $(-3; -1)$

C) $(-1; 1)$

D) $(1; 3)$

E) $(3; 5)$

20 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$\log_2(x-3) = \log_3 9$

$\log_2(x-3) = 2$

$2^2 = x - 3$

$4 = x - 3$

$x = 7$

21

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{1-2\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\sqrt{3}} = \frac{3(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} =$$

$= \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 6$

22 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \wedge \sin x \geq 0) \Rightarrow \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

23

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{-(1 - \sin^2 x)} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin x \cancel{\cos x}}{-\cos^{\cancel{2}} x} = -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\operatorname{tg} x$$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \Rightarrow \sin^2 x \neq 1 \Rightarrow \sin x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

24 **Využijeme grafické řešení.**

Z obrázku jsou patrné příslušné tři průsečíky.

Průsečíky v bodech $x = 0$ a $x = 2\pi$ nevyhovují intervalu, na kterém řešení hledáme.

A) 0 řešení

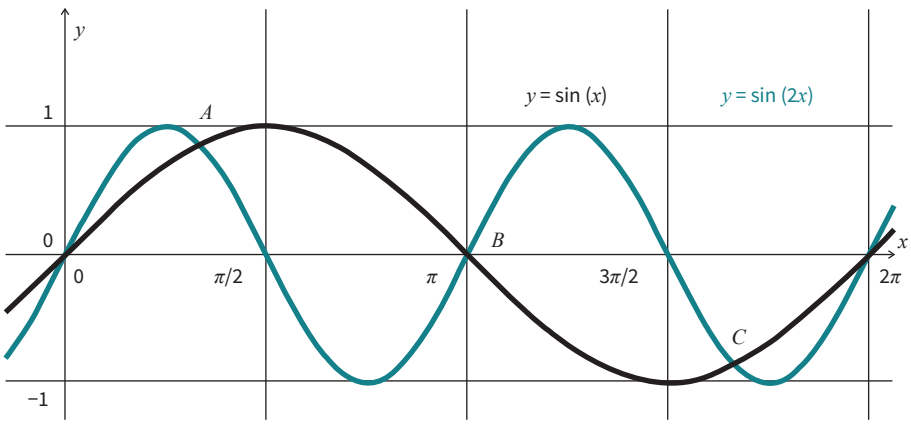
B) 1 řešení

C) 2 řešení

D) 3 řešení

E) 4 řešení

Využijte grafů obou funkcí.



25

25.1. $y = 2\sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right] \end{cases}$

25.2. $y = \cos x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3}+4}{2} \Rightarrow B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right] \\ \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

25.3. $y = \operatorname{tg} x - 3 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{\sqrt{3}-9}{3} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \Rightarrow C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right] \end{cases}$

A) $A\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right]$

B) $B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right]$

C) $C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right]$

D) $D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right]$

E) $E\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}+2}{3}\right]$

25.1. **D**
25.2. **B**
25.3. **C**

26 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

A) 0

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

D) $\frac{3}{2}\pi$

E) 2π

ŘEŠENÍ – POSLOUPNOST A FINANČNÍ MATEMATIKA

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $a_1 = 3$

2 7 975

3 98 550

4 $a_1 = 1\,300$ Kč, $a_2 = 2\,100$ Kč, $a_3 = 2\,900$ Kč, $a_4 = 3\,700$ Kč

5 855

6 $s_8 = \frac{6\,305}{243} \doteq 25$

7 $a_{10} \doteq 0{,}04$ cm, $s_{15} \doteq 23{,}38$ cm^2

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 A) $a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ posloupnost není aritmetická

D) $\frac{a^2}{a_1} \neq \frac{a^3}{a_2}$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} + \frac{4^2 - 3 \cdot 4}{5} = 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný. V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5) \cdot d$

$d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení:

$d = 0{,}08$ m

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5) \cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14 \cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$d = \frac{9 - 2a_1}{10}$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12; a_n = 96; d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$
$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_{15} = \frac{15}{2} \cdot (12 + 96)$

$s_{15} = 810$

5 5.1 Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20; d = 3; n = 9;$

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9 - 1) \cdot 3$
$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot d)$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\frac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 6.1 Počty kostek v šedých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet šedých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n - 1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma. Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98$

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n - 1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144$

A)	méně než 98	6.1	**B**
B)	98	6.2	**E**
C)	108		
D)	140		
E)	více než 140		

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

7 $K_0 = 400\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}08$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 3$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

A ☐ N ■

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí ($k = 1$). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % ($k = 0{,}85$).

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Po dosazení:
$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč $\doteq$ 503 885 Kč

8 8.1 $q = \sqrt{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

A ☐ N ■

Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

8.2 $a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

A ■ N ☐

8.3 $a_3 + a_4 + a_5 = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{38}{81}$

A ■ N ☐

8.4 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$

A ☐ N ■

9 9.1 Délky stran jednotlivých trojúhelníků tvoří členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 1$ m. Abychom si lépe představili hodnotu kvocientu, je vhodné si druhý největší trojúhelník pootočit tak, aby jeho vrcholy ležely ve středech stran největšího trojúhelníku.

Geometrická posloupnost má tedy kvocient $q = \frac{1}{2}$.

Čtvrtý člen posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

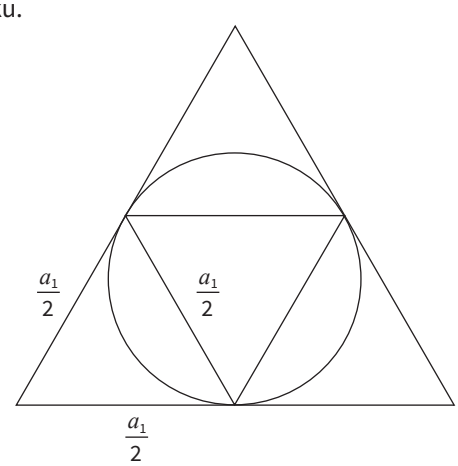
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Po dosazení:

$$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ m} = 0{,}125 \text{ m}$$

Pro obvod trojúhelníku platí:

$$o_4 = 3 \cdot a_4 = 0{,}375 \text{ m}$$



9.2 $S_n = \frac{\sqrt{3}}{32}\ \text{m}^2$

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí vztah:

$S_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Z tohoto vztahu vyjádříme strany trojúhelníku:

$a_n = \sqrt{\frac{4S_n}{\sqrt{3}}}$

Po dosazení:

$a_n = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}}\ \text{m} = 0{,}25\ \text{m}$

Pořadí hledaného členu posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$0{,}25\ \text{m} = 1\ \text{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n = 3$ Daný obsah má třetí největší trojúhelník.

Podle Pythagorovy věty má výška rovnostranného trojúhelníku velikost $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Pro obsah rovnostranného trojúhelníku pak dostáváme vztah $S = \frac{a \cdot v}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Úlohu bychom mohli řešit taky pomocí posloupnosti obsahů trojúhelníků. Ta je taky geometrická a její kvocient je druhou mocninou kvocientu posloupnosti délek stran trojúhelníků. Kvocient posloupnosti obsahů je tedy $\frac{1}{4}$ a první člen $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{m}^2$.

10 $K_0 = 40\,000$ Kč (počáteční vklad)
$p_1 = 0{,}02$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$p_2 = 0{,}013$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n_1 = 3$ (počet úrokovacích období)
$n_2 = 2$ (počet úrokovacích období)
$k = 0{,}85$ (zdaňovací koeficient)

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n1} = 42\,075$ Kč

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n2}$
$K_5 = 43\,010$ Kč $\doteq 43\,000$ Kč

A) 42 000 Kč
B) 43 000 Kč
C) 43 600 Kč
D) 44 000 Kč
E) 44 200 Kč

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$

11 $K_0 = 1\,500\,000$ Kč (počáteční výše úvěru)
$p = 0{,}055$ (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
$n = 10$ (počet úrokovacích období)
$k = 1$ (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

11.1 **Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:**

$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10} \doteq 2\,562\,000$ Kč

11.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$

Po dosazení:

$p = \sqrt[10]{\frac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq 5{,}2\ \%$

ŘEŠENÍ – PLANIMETRIE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 135°

2 $S = 90\ cm^2$

3 4 cm, $(80 - 32\sqrt{3})$cm

4 $\frac{64}{25}$

5 $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$, $\alpha \doteq 99°36'$

6 C

7 $2\sqrt{6}$ cm

2 : 5

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 1.1 D)
1.2 B)
1.3 E)
1.4 A)

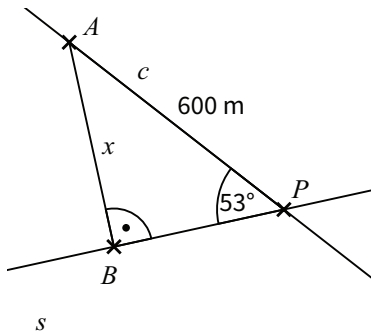
Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

2 2.1 C)
2.2 A)
2.3 B)
2.4 F)

2.1 *Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou p, ale obě, tedy přímky q i r.*
2.3 *Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem AB (tedy k) bez krajních bodů A a B.*
2.4 *Jde o osu úsečky AB, což je přímka p, protože je na AB kolmá a prochází jejím středem.*

3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}\,\text{km} = 0{,}6\,\text{km} = 600\,\text{m}.$



Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka s, lesní cesta jako přímka c. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu P do bodu A. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice x vedené z bodu A na přímku s.

V pravoúhlém trojúhelníku ABP platí: $\frac{x}{|AP|} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\,\text{m} \doteq 480\,\text{m}$

A)

4 4.1
V pravoúhlém trojúhelníku ACD s odvěsnami AC a CD platí:

$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\,\text{cm}^2$

$S = 7\,\text{cm}^2$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

4.2
Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany a, b)

Protože máme zadány strany b a c a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$

$S = 7{,}66\,\text{cm}^2$

$S \doteq 8\,\text{cm}^2$

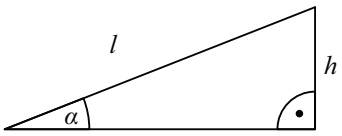
5 Pomůže nám obrázek vpravo.

Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin \alpha = \frac{h}{l}$;

kde h se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy $h = (630 - 440)\ \text{m} = 190\ \text{m}$

$\sin \alpha = \frac{190}{2\,100} = 0{,}905$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}905) = 5{,}19°$ A)



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

6 6.1 $v = 8 \cdot \text{tg}\ 35° = 5{,}6\ \text{m}$ B)

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \text{m}$ A)

6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

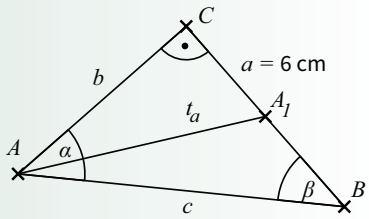
$v = 5{,}9\ \text{cm}$ C)

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

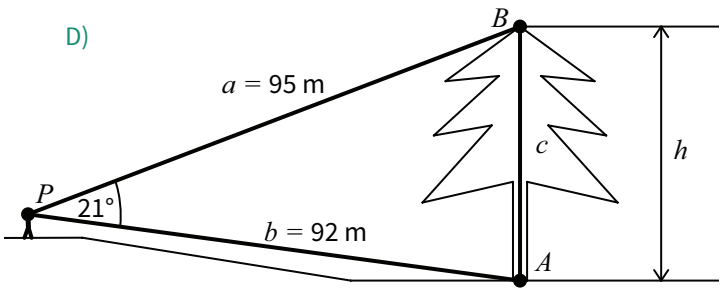
	A	N
7.1 Je-li $\alpha = 30°$, pak $c = 12$ cm.	●	○
7.2 Je-li $b = 4$ cm, pak $t_a = 5$ cm.	●	○
7.3 Je-li $b = 4$ cm, pak $c = 8$ cm.	○	●
7.4 Je-li $\beta = 50°$, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.	○	●

7.1 $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2}$,
tedy $c = 2a = 12$ cm
7.2 *Těžnice* t_a *spojuje vrchol A se středem strany a, tedy bodem* A_1.
$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3$ cm
Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 *platí*
$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$t_a^2 = 4^2 + 3^2$
$t_a = 5$ cm
7.3 $c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{52}$ cm $\doteq 7{,}21$ cm $\neq 8$ cm
7.4 *Je-li* $\beta = 50°$, *pak je*
$\alpha = 90° - 50° = 40°$
Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musím mít dva vnitřní úhly shodné.



8 Pomůžeme si obrázkem.
V trojúhelníku ABP známe dvě strany a úhel, který svírají.
Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m D)



Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.

9 9.1

Protože skutečná délka arboreta je 7 500krát větší než na plánu a skutečná šířka je také 7 500krát větší než na plánu, je skutečná rozloha 7 500²-krát větší než rozloha na plánu.

$S = 3{,}84 \cdot 7\,500^2\ \text{cm}^2 = 2{,}16 \cdot 10^8\ \text{cm}^2 = 21\,600\ \text{m}^2$

$S = 2{,}16$ ha

9.2

Označme délku arboreta jako a, šířku jako b. Protože má být délka o polovinu větší než šířka, platí $a = 1{,}5b$

$S = a \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$

$1{,}5b \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$

$b^2 = 14\,400\ \text{m}^2$

$b = 120$ m

$a = 180$ m

10 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten neodpovídá zadání, úhel u vrcholu A např. neměří přesně 60°. Budeme muset obě délky vypočítat.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{|AC|}{8\ \text{cm}} = \cos 60°$$

$$|AC| = 4\ \text{cm}$$

Stranu BD vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu A, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.

$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$

Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}797\,95...$ cm

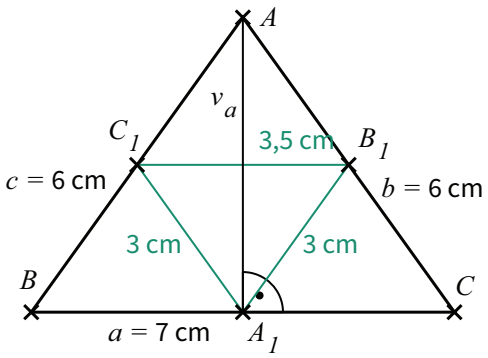
Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi

$9{,}798 : 4 = 2{,}449\,48... : 1$

Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$. C)

11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný.

Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$

Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.

$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$

$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm

Dosadíme do vzorce: $S = \frac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057\ \text{cm}^2$

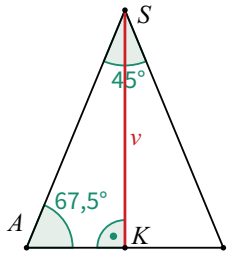
$S \doteq 17\ \text{cm}^2$ A)

12 12.1

Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost 360° : 8 = 45°, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

12.2

Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$\frac{v}{|AK|} = tg\ 67{,}5°$

$v = 2{,}5\ \text{m} \cdot tg\ 67{,}5° = 6{,}036\ \text{m}$

Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09\ \text{m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy 3 . 15,09 m² = 45,27 m² ≐ 45 m².

13 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$2S = (a+c) \cdot v \quad / : v$

$\frac{2S}{v} = a + c \quad / - c$

$\frac{2S}{v} - c = a$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm. E)

14 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

$S = a \cdot v;\ S = \frac{e \cdot f}{2}$

Platí tedy $a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2}$. Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$a = \frac{e \cdot f}{2v}$

$a \doteq 11$ cm A)

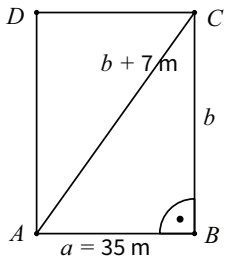
15 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.

Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.

Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84$ m².

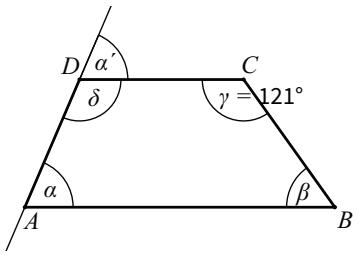
$S = 2\,940$ m²



16 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α' (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α', proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.

Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.

Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\frac{2}{3}\delta$:



$\frac{2}{3}\delta + \delta = 180°$

$\delta = 108°$

$\alpha = 72°$

Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy 72° – 59° = 13°.

17 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem (400 – 2 x 80) m = 240 m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce o = 240 m.

$o = 2\pi r$

$r = \frac{o}{2\pi}$

$r = 38{,}197 \text{ m} \doteq 38 \text{ m}$

18 18.1

Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$S = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$

$S = \pi \cdot (11^2 - 8^2)$

$S = 57\pi$ E)

18.2

Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\,\pi$ C)

18.3

Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu r_1 = 15, poloměr většího kruhu r_2 = (15 + 10) = 25.

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi$ D)

19 Délku oběžné dráhy vypočítáme jako délku kružnice s poloměrem 384 400 km: $o = 2\pi r$ = 2 415 256 km.
Tuto dráhu vykoná Měsíc za 27,3 dne. Za jeden den tedy urazí dráhu 27,3× kratší.

$s = 88\,471 \text{ km} \doteq 88\,000 \text{ km}$ E)

20 20.1 F)
20.2 C)
20.3 A)
20.4 D)

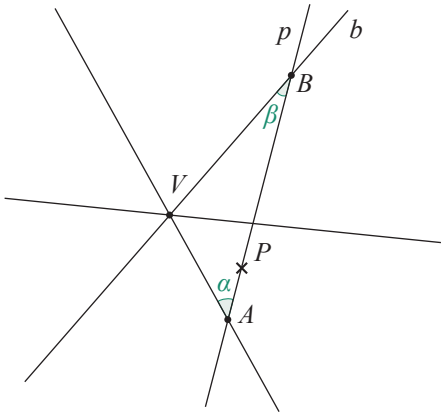
20.1 *Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu $S[1; 1]$ o 90° v záporném smyslu, již to vychází.*

20.2 *Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.*

20.3 *Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.*

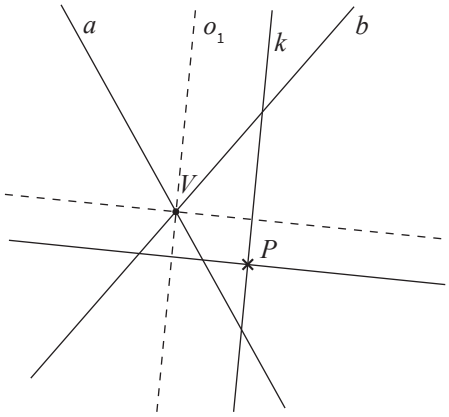
20.4 *Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor u = (–2; 1).*

21 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.

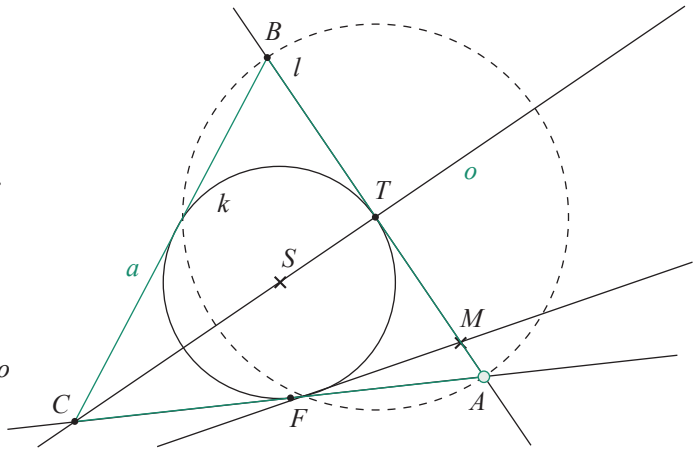


Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

22 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A a (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



ŘEŠENÍ – STEREOMETRIE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 A

2 Přibližně 2,06 cm od podstavy.

3 A

4 $v \doteq 14{,}2$ cm

5 492,4 cm^3

6 O $(3x^2 + 18)$ cm^2

7 216°

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle.
Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je
$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je
$S' = 6 \cdot (0{,}75a)^2 = 6 \cdot 0{,}75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}5625$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25% původního povrchu.

Změní – li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch **o 43,75 %**.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}5625 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch …? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je 100 % – 56,25 % = 43,75 %.

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$.

S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu $\sin 390° = \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$, $V = 18 \cdot 24 \cdot 8 = 3456$ cm^2.

E) jiná možnost

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268{,}1$ cm^3.

Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268{,}1$ cm^3 = 804, 25 cm^3

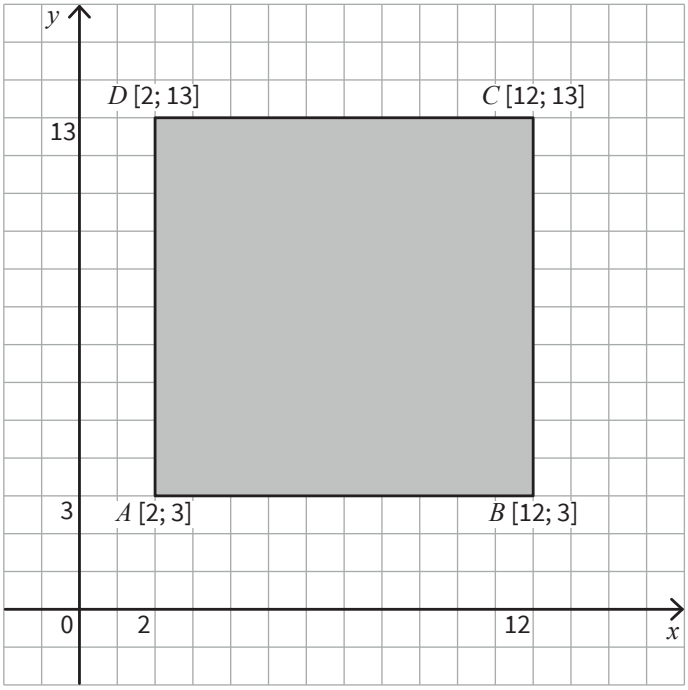
a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804{,}25$ cm^3, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule

$S = 4\pi \cdot R^2 =$ **418 cm²**.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ j^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13$ j. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

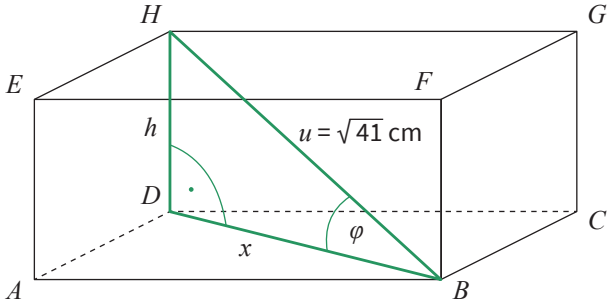
Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3} a^2 v =$ **433,3 j³**.

5 5.1

Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin \varphi = \frac{h}{u} \quad \Rightarrow \quad h = u \cdot \sin 28° \doteq$ **3 cm**

K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.



5.2

Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos \varphi = \frac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad x = u \cdot \cos 28° \doteq 5,65$ cm

Navíc podstava je čtverec:

$x = \sqrt{2} \cdot |AB| \quad \Rightarrow \quad |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

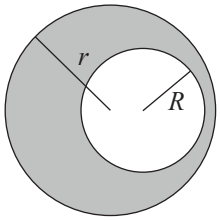
Povrch celého kvádru je:

$S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq$ **80 cm²**

6 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavy válečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě:

Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.



Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ ... 35%
$\pi \cdot r^2$ ... 100%

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28 \text{ cm}.$$

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.

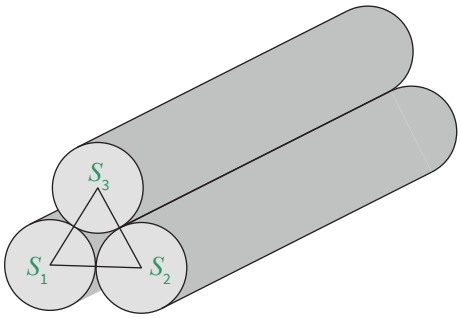
Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

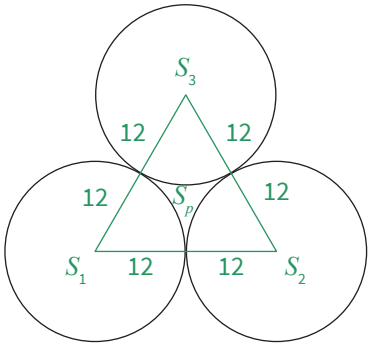
$$S = 2 \cdot (\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$$

$$S = 2\pi\,(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v)$$

$$\boldsymbol{S \doteq 8080 \text{ cm}^2}$$

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný:





Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru. K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů. Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \doteq 249{,}4 \text{ cm}^2$$

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226{,}1 \text{ cm}^2$$ *(při použití 3,14 místo π)*

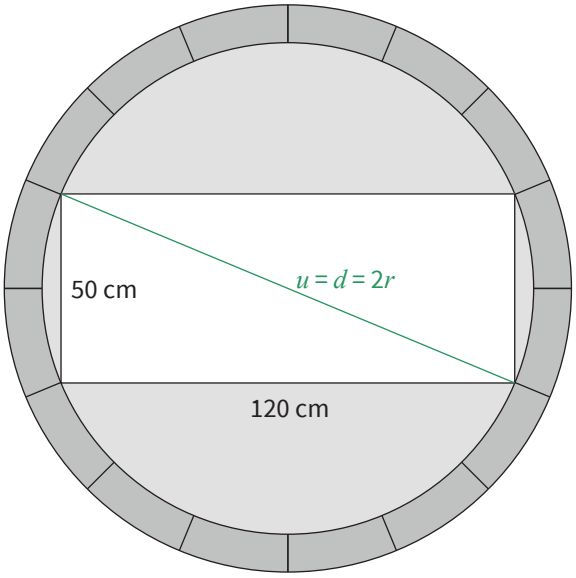
Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$$S_p - S_1 = 23{,}3 \text{ cm}^2$$

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu v = 300 cm:

$$V = S_p \cdot v = 6990 \text{ cm}^3 \doteq \mathbf{7\ dm^3}$$

8



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz. obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce“, což odpovídá 74 % hloubky studně.

$u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130\text{ cm} = 1{,}3\text{ m}$

$r = 0{,}65\text{ m}$

$60\text{ hl} = 6000\text{ l} = 6000\text{ dm}^3 = 6\text{m}^3$

$0{,}74 \cdot V = 6$

$V \doteq 8{,}1\text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$

$\boldsymbol{v \doteq 6{,}1\text{ m}}$ **A)**

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729\text{ cm}^2 = 12\pi\text{ cm}^2$.

Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:

$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.

Pro délku hrany krychle platí: $a = \frac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.

Objem krychle je potom: $V = a^3 =$ **8 cm³**.

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.

V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm,

poloměr horní podstavy je $r_2 = 12$ cm

a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.

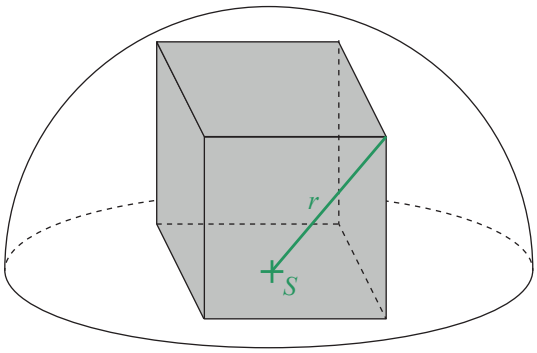
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$.

Objem kyblíku je tedy: $V = 7671{,}77\text{ cm}^3$,

tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7671{,}77\text{ cm}^3 = 92061\text{ cm}^3 \doteq$ **92 litrů**.

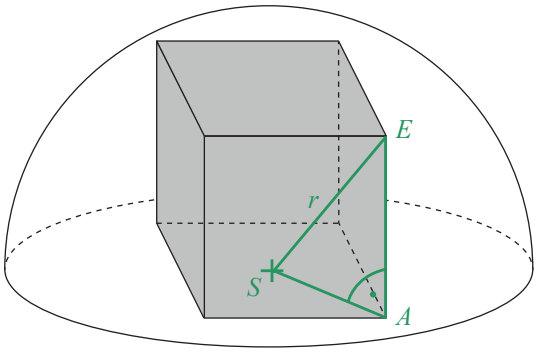
11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle.

Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAE:

$r^2 = 8^2 + (\sqrt{32})^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{96}\ \text{cm} = 4 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}$

Pro délku vnitřního průměru misky platí: $\boldsymbol{d = 8 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}}$

12 12.1 A ☑ N ☐

$S_{koule} = S_{krychle}$

$4\pi r^2 = 6a^2$

$r^2 = \dfrac{3a^2}{2\pi}$

$r = a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}$

$V_{koule} = \dfrac{4}{3}\pi\left(a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq 1{,}38a^3$

$V_{krychle} = a^3$

$V_{krychle} < V_{koule}$

12.1) V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2) Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3) Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

12.2 ☑ ☐

$3 \cdot 10^8\ \text{cm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = 3 \cdot 10^5\ \text{dm}^3 + 4 \cdot 10^6\ \text{dm}^3 =$
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{dm}^3 = 4\,300\,000\ \text{l} = 43\,000\ \text{hl}$

12.3 ☐ ☑

V = 1,5 l

$\dfrac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\ \text{l} = 900\ \text{ml}$

ANALYTICKÁ GEOMETRIE – ŘEŠENÍ

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $A = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$

2 $D[-8; 1]$

3 $o: x + 2y - 6 = 0$

4 $c = \pm 5\sqrt{2}$

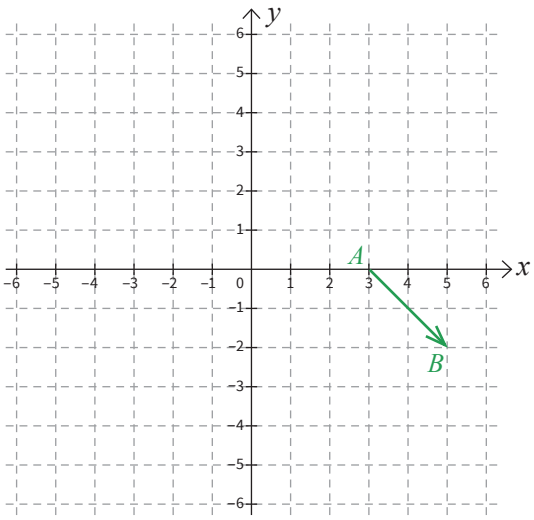
5 Přímky jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod.

6 $\alpha \doteq 36°52'$

7 $m: y + 3 = 0$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $A[3; 0]$, $B[5; -2]$



Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

C) $\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru (3; –4). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

2 2.1

Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé.

A N

2.2

Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k- násobkem jeden druhého.

A N

2.3

Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p.

A N

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \Rightarrow q: 3x - y + c = 0$

$B \in q: 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -15$

$q: 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \Rightarrow r: x + 3y + c = 0$

$A \in r: 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$r: x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky p zapíše normálový nebo směrový vektor přímky r a rovnici přímky r. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce p.

5 $\overrightarrow{n_{o_{AB}}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \Rightarrow o_{AB}: 4x + 4y + c = 0 \quad /:4$

$x + y + c = 0$

$S_{AB}[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}: 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + c = 0$

$3 - 2 + c = 0$

$c = -1$

$o_{AB}: x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu S úsečky AB napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce AB procházející bodem S.

6 $\overrightarrow{AC} = (1; 7) = \overrightarrow{s_{AC}}$

$\overrightarrow{n_{AC}} = (7; -1)$

$\leftrightarrow AC: 7 \cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC: 7 \cdot 1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

D) $7x - y - 5 = 0$

$\overrightarrow{BD} = (-7; 1) = \overrightarrow{s_{BD}}$

$\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 7)$

vyhovuje úhlopříčka AC

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku AC, nebo BD. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

7 7.1

$\overrightarrow{u_p} = (1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = (1; 1)$ F)

7.2

$\overrightarrow{u_q} = (1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (0; -1)$ resp. $\overrightarrow{n_q} = (0; 1)$ B)

7.3

$\overrightarrow{u_r} = (1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_r} = (1; -1)$ E)

7.4

$\overrightarrow{u_s} = (0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_s} = (-1; 0)$ resp. $\overrightarrow{n_s} = (1; 0)$ A)

Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky q a s, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

8 8.1

vektor $\overrightarrow{BA} = (2; 1)$ A ○ N ●

8.2

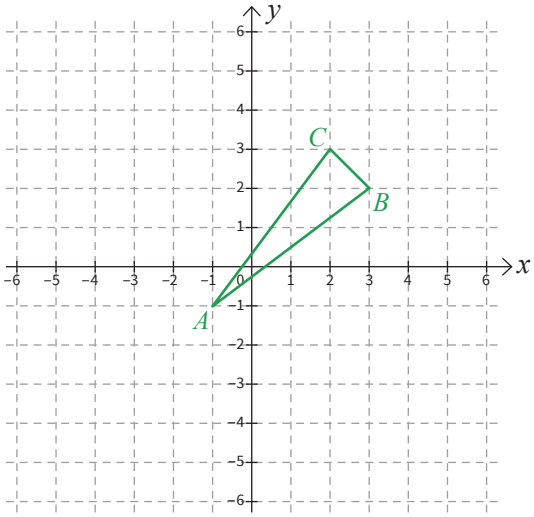
vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$ A ○ N ●

8.3

vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1) \Rightarrow 3 \cdot AB = (-6; -3)$ A ● N ○

Žák může chybně počítat v úloze 14.1 se souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{AB}$ a ne vektoru $\overrightarrow{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy 14.2 a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy 14.1 V úloze 14.3 se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\overrightarrow{AB}$.

9



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

10 $a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

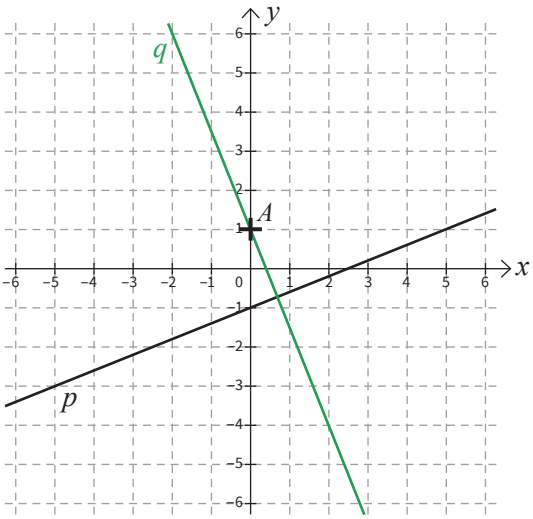
$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

11 $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{4\cdot 3 + 3\cdot 4}{5\cdot 5} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

12



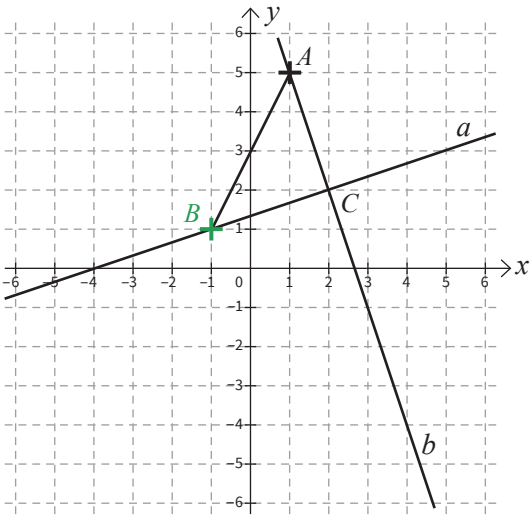
Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

$\overrightarrow{u_p} = (5; 2) = \overrightarrow{n_q} \Rightarrow q\colon 5x + 2y + c = 0$

$A \in q\colon 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$q\colon 5x + 2y - 2 = 0$

13



Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu B lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě C, poloměr CA je přenesen na přímku a. Z obrázku žák určí souřadnice bodu B. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky AB.

$B = [-1; 1] \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{u_c} = (2; 4)$

$\overrightarrow{n_c} = (4; -2) \Rightarrow c\colon 4x - 2y + c = 0 \qquad /:2$

$A \in c\colon 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$c\colon 2x - y + 3 = 0$

14 $B[0; 0], D[-3; 3], \Rightarrow \overrightarrow{BD} = (-3; 3)$

$u_{BD}\colon \quad x = -3t \quad$ resp. $\quad x = t$

$y = 3t; t \in \mathbb{R} \qquad y = -t; t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů B a D. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\overrightarrow{AC}$ a z normálového vektoru $\overrightarrow{AC}$ vypočítat směrový vektor.

15 $\overrightarrow{n_o} = \overrightarrow{AB} = (2; -4) \Rightarrow o: 2x - 4y + c = 0 \qquad /:2$

$S_{AB}[2; 0] \in o$: $1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

o: $x - 2y - 2 = 0$

$P_x[x; 0] \Rightarrow P_x = S_{AB}[2; 0]$

$P_y[0; y]$: $0 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_y[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou x a y jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

16 $\overrightarrow{n_p} = (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{u_p} = (3; 2)$

$\overrightarrow{u_q} = (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (3; 2)$

$\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{u_q} = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky p a parametrické rovnice přímky q žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

17 15.1
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ F)

15.2
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$ C)

15.3
$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ A)

15.4
$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$

a: $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

19 Body A a B jsou osově souměrné podle osy $o \Rightarrow B[4; 3]$

$\overrightarrow{u_o} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; -3) \Rightarrow \leftrightarrow AB$: $2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$

$\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a –2.
Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A[3; 0]$ a koncovým bodem $B[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

ŘEŠENÍ – KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 200 čísel

2 6 týmů

3 $-2p^2 + 13p - 36$
Podmínky: $p \in \mathbb{N}, p \geq 8$

4 $P = \frac{1}{32}$

5 697 680 způsobů
$P = \frac{1}{45}$

6 16 bodů

7 8 dětí

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1. způsob –** s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**

Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

*U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály. Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**. Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.*

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=$

pro rozpis faktoriálu $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot 2\cdot 1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!}-\cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}}+\cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}+\frac{8!}{5!\cdot 3!}-\cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}+\cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1}=\binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2}=\binom{8}{6}$

$\binom{n}{0}=1$ proto platí: $\binom{8}{0}=1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\cancel{\binom{8}{1}}+\cancel{\binom{8}{2}}+\binom{8}{5}-\cancel{\binom{8}{6}}+\cancel{\binom{8}{7}}}{5!-3!}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)!}{(x-1)!}-2\cdot\frac{x!}{(x-2)!}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!}-\frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!}=$

$=(x+3)!\cdot(x+2)+(x+1)\cdot x-2x(x-1)=x^2+2x+3x+6+x^2+x-2x^2+2x=8x+6$

A) $8x+6$
B) $6x+6$
C) x^2+6
D) $20x-12$
E) $4x-7$

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou x. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$ A ■ N □

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$ A ■ N □

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \frac{20!}{17! \cdot (20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!}$

proto rovnost platí: $1140 = 1140$

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$ A ■ N □

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4!-2!$ A □ N ■

platí: $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 = 22$

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi.
Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

4 Jedná se o **kombinace bez opakování**.

4.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$K(3,7) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

4.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$K(3,6) + K(3,9) = \binom{6}{3} + \binom{9}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 104$

4.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$K(3,9) + K(3,5) = \binom{9}{3} + \binom{5}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 94$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce.
Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích.
Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

A)	35	4.1	**A**
B)	104	4.2	**B**
C)	94	4.3	**C**
D)	840		
E)	1680		

5 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o **variace bez opakování**, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:

zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici.
Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

$V(4,8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$
K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

A) 70
B) 6720
C) 126
D) 1680
E) 40

6 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu.

Jedná se tedy o **kombinace bez opakování**.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2,6) \cdot K(1,6) = \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1} = 15 \cdot 6 = 90$$

A) 315
B) 90
C) 36
D) 21
E) 220

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být jiný počet mužů a žen.

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

7.1 Padne součet 5. A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+4, 2+3, 3+2, 4+1,
proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Padne součet 7. A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1,
proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 Nepadne součet 6. A □ N ■

Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti **opačného jevu C'**.
Platí $P(C) = 1 - P(C')$.

Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1,
proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 5$.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Padne součet 5 nebo 6 . A ■ N □

Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz. výše),
pro součet 6 je $m = 5$ (viz. výše).

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

8 **8.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen.
To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:

$$V'(6,8) = 8^6 = 262144$$

8.2 $6! = 720$

9 9.1 Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \%$$

9.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí.
Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \%$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

9.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka.
Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \%$$

A)	19 %	9.1	D
B)	36 %	9.2	A
C)	50 %	9.3	C
D)	57 %		
E)	68 %		

10 10.1 Závod dokončí Mercedes i Red Bull.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.
Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou **nezávislých jevů**,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 = 0{,}86$, proto 86 %

10.2 Ferrari **nedokončí** závod.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.
Pravděpodobnost, že Ferrari **nedokončí** závod, vypočítáme jako pravděpodobnost **jevu opačného**:

$P(B) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$, proto 19 %

10.3 Závod **nedokončí** ani McLaren, ani Renault.

Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. ⇒ že **nedokončí** závod je 0,24.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. ⇒ že **nedokončí** závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 = 0{,}06$, proto 6 %

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

10.4 Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86
a tudíž že ho **nedokončí** je 0,14 závod dokončí Williams,
ale **nedokončí** Force India:

$P(D) = 0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}12$, a to je 12 %

A)	75 %	10.1	C
B)	6 %	10.2	E
C)	86 %	10.3	B
D)	92 %	10.4	F
E)	19 %		
F)	12 %		

11 Víme, že **průměr** dosažených bodů je **78** (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.
Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.
Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmu:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{14} = 78 \qquad / \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1092$$
$$3x = 165 \qquad / : 3$$
$$x = 55$$

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

12 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky.

Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno.
Pro medián platí, že soubor hodnot **musí být uspořádaný podle velikosti!**

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$),
tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\tilde{X} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

Správné hodnoty jsou tedy:

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu. Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti. Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu. Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

Proto je správná **varianta D**.

ŘEŠENÍ – TEST 1

1 Vyjádříme všechna čísla jako zlomky se jmenovatelem 42, protože 42 je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 6, 7.

$-\frac{17}{6} = -\frac{119}{42}, -\frac{7}{3} = -\frac{98}{42}, \frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$

Do intervalu $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{105}{42}; \frac{28}{42}\right)$ tedy patří čísla $-\frac{98}{42} = -\frac{7}{3}$ a $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

$-\frac{7}{3} + \frac{2}{7} = -\frac{98}{42} + \frac{12}{42} = -\frac{86}{42} = -\frac{43}{21}$

Není vhodné převádět zlomky na desetinná čísla.
$-\frac{43}{21}$ případně lze vyjádřit jako smíšené číslo $-2\frac{1}{21}$.

2 Přímý úhel má velikost 180° nebo π radiánů. Tento vztah využijeme k vyjádření úhlu $\frac{7}{10}\pi$ radiánů ve stupňové míře.

$\frac{7}{10}\pi \text{ rad} = \frac{7}{10} \cdot 180° = 126°$

$\alpha = 180° - 126° = 54°$

$\alpha = 54°$

Druhá možnost řešení:
Vypočítáme nejprve velikost úhlu α v obloukové míře:
$\alpha = \left(\pi - \frac{7}{10}\pi\right) \text{rad} = \frac{3}{10}\pi \text{ rad}$
a výsledek převedeme na stupňovou míru: $\alpha = \frac{3}{10}\pi \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$.

3 **Dosazovací metodou** (využijeme toho, že v druhé rovnici je vyjádřena neznámá y, dosadíme za y do první rovnice, vyřešíme rovnici s jednou neznámou x):

$x = 2\,(2x + 7) + 4$

$x = 4x + 14 + 4$

$-3x = 18$

$x = -6$

Dosadíme do rovnice $y = 2x + 7$ hodnotu x a vypočítáme y: $y = 2 \cdot (-6) + 7 = -5$

$K = \{[-6; -5]\}$

Použili jsme jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, proto provádět zkoušku není nutné.
Bylo možné využít x vyjádřené z první rovnice pro dosazení do druhé rovnice:
$y = 2\,(2y + 4) + 7$, pak $y = -5$
a dopočítáme $x = -6$.
*Je možné použít též **sčítací metodu** (uspořádáme umístění neznámých v obou rovnicích, druhou rovnici vynásobíme dvěma a obě rovnice sečteme, vyřešíme rovnici s jedinou neznámou x):*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + y &= 7 \\ -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme $y = -5$.

4 Funkce $y = \cos x$ nabývá hodnoty –1 pro všechna $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

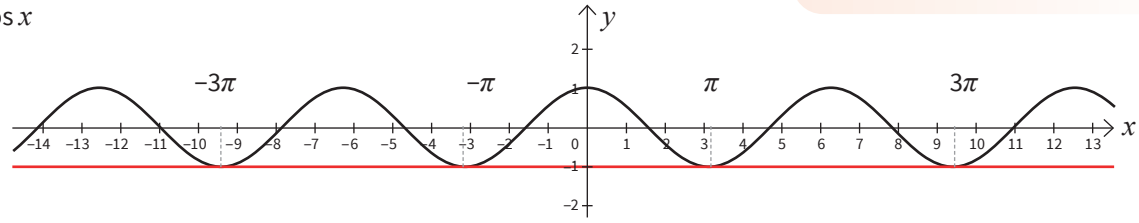
Použijeme substituci $x = \frac{\pi}{3} + t$; řešíme tedy rovnici $\frac{\pi}{3} + t = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z této rovnice vyjádříme $t = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hledáme řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$: pro $k = 0$ je $t = \frac{2\pi}{3}$ a pro žádné jiné celé číslo k nepatří t do intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

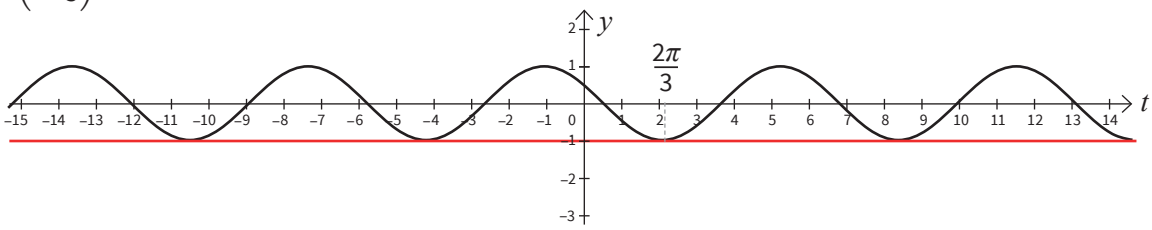
$t = \frac{2\pi}{3}$

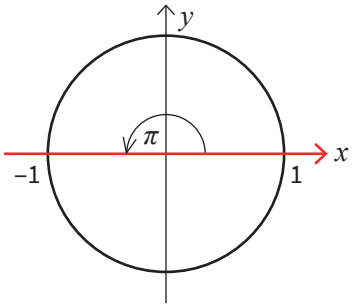
Lze ilustrovat na grafu funkce, případně na jednotkové kružnici.

$y = \cos x$



$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$



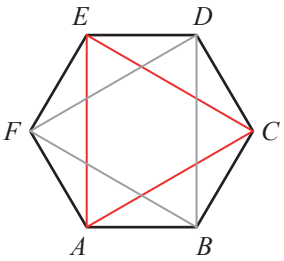


5 Pravděpodobnost náhodného jevu počítáme jako poměr počtu výsledků pokusu jevu příznivých m a počtu všech možných výsledků pokusu n. Náhodným pokusem se v tomto případě rozumí výběr tří vrcholů ze šesti vrcholů šestiúhelníku.

$n = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

Nezáleží na pořadí výběru vrcholů trojúhelníku.

Rovnostranný trojúhelník lze sestrojit právě dvěma způsoby (červený trojúhelník ACE a modrý trojúhelník FBD), $m = 2$.



Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

6 $\frac{1}{2} - 3x \geq -2 + x$

Od obou stran nerovnice odečteme x a $\frac{1}{2}$

$-4x \geq -2 - \frac{1}{2}$

$-4x \geq -\frac{5}{2}$

Obě strany nerovnice dělíme číslem −4

$x \leq x : (-4)$

$x \leq \frac{5}{8}$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší nebo rovna $\frac{5}{8}$,

tedy všechna čísla z intervalu $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Při dělení záporným číslem se obrací znak nerovnosti.

Mohli bychom postupovat i takto: K oběma stranám nerovnice přičteme výraz $3x + 2$, dostaneme nerovnici $\frac{1}{2} + 2 \geq x + 3x$, tedy $\frac{5}{2} \geq 4x$. Dělíme obě strany rovnice kladným číslem 4 (bez obracení znaku nerovnosti) a dostaneme $\frac{5}{8} \geq x$. Je nutno dát pozor na správné přečtení této nerovnosti – vyjadřuje pořád skutečnost, že x je ***menší nebo rovno*** *$\frac{5}{8}$, tedy $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.*

7 Mezi množstvím těsta a počtem rohlíčků je přímá úměrnost, tedy Katka bude potřebovat $240 \cdot \frac{90}{60}$ g těsta.
360 rozdělíme v poměru 4:2:5:5, na máslo připadá 90 g.

Katka bude potřebovat 90 g másla.

Dělení hmotnosti 360 g v daném poměru: $4 + 2 + 5 + 5 = 16$, $\frac{360}{16} \cdot 4\ g = 90\ g$.

Jiná možnost: Určíme nejdříve hmotnost másla při pečení 60 rohlíčků: $\frac{240}{16} \cdot 4\ g = 60\ g$. Proto pro 90 rohlíčků bude třeba 90 g másla.

8 V geometrické posloupnosti je podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů rovný kvocientu posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Tedy $\frac{a_2}{a_1} = q$ a také $\frac{a_3}{a_2} = q$, proto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Dosadíme $\left(a_1 = 2\sqrt{2}, a_2 = 4, a_3 = m\right)$:

$\frac{m}{4} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$

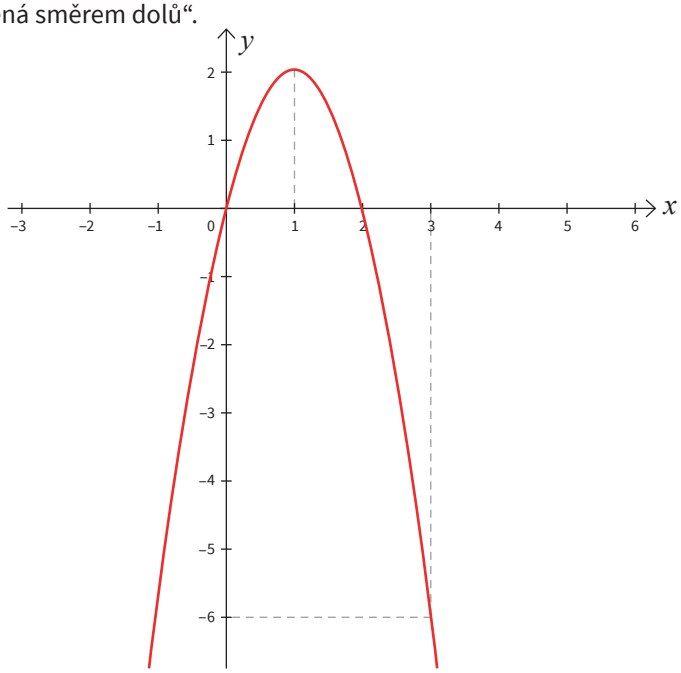
$\frac{m}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$m = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}}$

$m = 4\sqrt{2}$

Také jsme mohli z prvních dvou členů určit kvocient $q = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pak $\frac{m}{4} = \sqrt{2}$; $m = 4\sqrt{2}$.

9 Grafem každé kvadratické funkce je parabola. Protože funkce f nabývá maxima, bude jejím grafem parabola „otevřená směrem dolů“.



Ze souměrnosti paraboly podle její osy vyplývá, že $f(3) = f(-1)$. Úlohu pak lze řešit pomocí soustavy rovnic:
$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$
$f(3) = -6 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -6$
$f(-1) = -6 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$
(Dostaneme $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$)

Ze souměrnosti by bylo možné použít také vztah $f(2) = f(0)$.

Graf hledané funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy, proto $f(0) = 0$, a tedy $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, tedy $c = 0$.

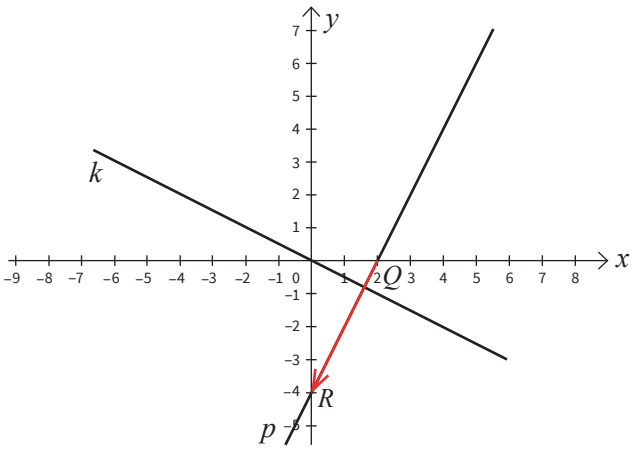
Kvadratická funkce nabývá svého maxima pro $x = -\frac{b}{2a}$, proto $-\frac{b}{2a} = 1$ … označíme (1).

Pro $x = 3$ nabývá hledaná funkce hodnotu −6, proto $-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ … označíme (2).

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme $a = -2$ a $b = 4$.

$a = -2$, $b = 4$, $c = 0$

10 Hledáme obecnou rovnici přímky k ve tvaru k: $ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b v této rovnici jsou souřadnice normálového vektoru přímky k $\left(\vec{n}_k = (a; b)\right)$. Přímka k má být kolmá k přímce p, proto jejím normálovým vektorem je vektor $\vec{n}_k = R - Q$ (nebo jeho libovolný nenulový násobek).
Souřadnice vektoru $\vec{n}_k$ určíme jako rozdíl souřadnic bodů R a Q: $\vec{n}_k = R - Q = (-2; -4)$.



***Řešení užitím úsekového tvaru rovnice přímky** p. Využijeme toho, že přímka p je určena svými průsečíky se souřadnicovými osami: $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$, případně rovnici převedeme na směrnicový tvar $y = 2x - 4$. Vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek je $a' = -\frac{1}{a}$.*
Přímka k bude mít směrnici $-\frac{1}{2}$ a směrnicovou rovnici $y = -\frac{1}{2}x$. Po úpravě získáme obecnou rovnici $x + 2y = 0$.

Ze souřadnic směrového vektoru přímky p získáme $a = -2$ a $b = -4$, obecnou rovnici přímky k můžeme zapsat ve tvaru k: $-2x - 4y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c, k tomu využijeme údaj, že přímka k prochází počátkem souřadnicové soustavy $P[0; 0]$.
$P[0; 0] \in k \Rightarrow -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$
Získali jsme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $-2x - 4y = 0$, po vydělení −2 máme k: $x + 2y = 0$.

11 Označíme počet všech příkladů ve sbírce x. Pomocí proměnné x zapíšeme údaje z textu:

Počet příkladů vyřešených do konce února … $\frac{x}{3}$

Počet zbývajících příkladů na konci února … $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

Počet příkladů vyřešených v březnu … $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$

Při řešení slovní úlohy nezapomeňte zapsat, jaký význam má (co označuje) zvolená neznámá, a správně formulovat odpověď na položenou otázku.

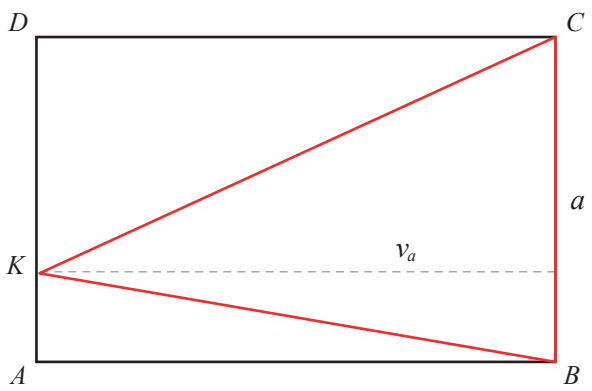
Počet příkladů vyřešených do konce března … $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x$. Na duben a květen tedy zbyla polovina všech příkladů, z ní jednu polovinu (tedy čtvrtinu z celkového počtu příkladů) vyřešila Ema v dubnu.

Sestavíme rovnici: $\frac{x}{4} = 54$, tedy $x = 216$.

Provedeme kontrolu správnosti: (v únoru $\frac{216}{3} = 72$ příkladů, v březnu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 36$ příkladů, v dubnu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 54$ příkladů, v květnu 54 příkladů, $72 + 36 + 54 + 54 = 216$).

Sbírka obsahovala 216 příkladů.

12 Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (v tomto případě $a = |BC|$ a v_a je vzdálenost bodu K od strany BC, tedy $v_a = |AB| = p$). Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku BCK, musíme znát délku strany BC a velikost výšky k této straně. Výpočty budeme provádět v centimetrech.



Všimněte si, že obsah trojúhelníku BCD nezávisí na umístění bodu K na úsečce AD, „posunutím“ bodu K po úsečce AD se velikost výšky trojúhelníku BCK na základnu BC nezmění.

Označíme $v_a = |AB| = p$; $a = |BC| = p - 2$.

Jediné, co potřebujeme určit, je číslo p. K tomu využijeme údaj o obvodu obdélníku $ABCD$ a vzorec pro výpočet obvodu obdélníku.

$$O = 2\left(|AB| + |BC|\right)$$

$$O = 2\left(p + (p - 2)\right) = 2(2p - 2) = 4p - 4$$

Dosadíme $O = 48$:

$48 = 4p - 4$

Po vyřešení rovnice $p = 13$, potom $v_a = |AB| = 13$, $a = |BC| = p - 2 = 13 - 2 = 11$.

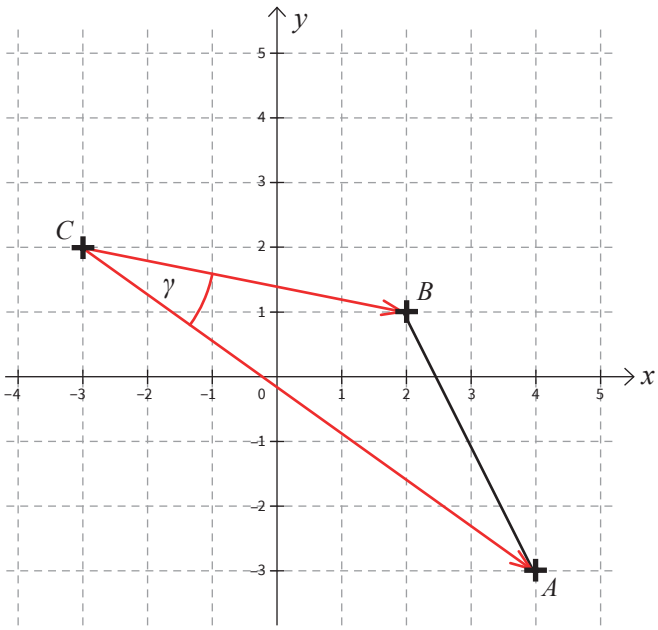
Nyní můžeme vypočítat obsah trojúhelníku BCK: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{11 \cdot 13}{2} = 71{,}5$.

Trojúhelník má obsah 71,5 cm².

13 $\sqrt{9a^4 + 16\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{9a^4 + 16a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

Připomeňte si, že $\sqrt{m^2} = |m|$. Pro $\sqrt{25a^4}$ bychom měli zapsat $\sqrt{25a^4} = |5a^2|$, ale víme, že $5a^2 \geq 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Tedy $|5a^2| = 5a^2$.

14 Vnitřní úhel u vrcholu C (v obrázku označen γ) je úhel sevřený vektory $\vec{u} = A - C$ a $\vec{v} = B - C$.



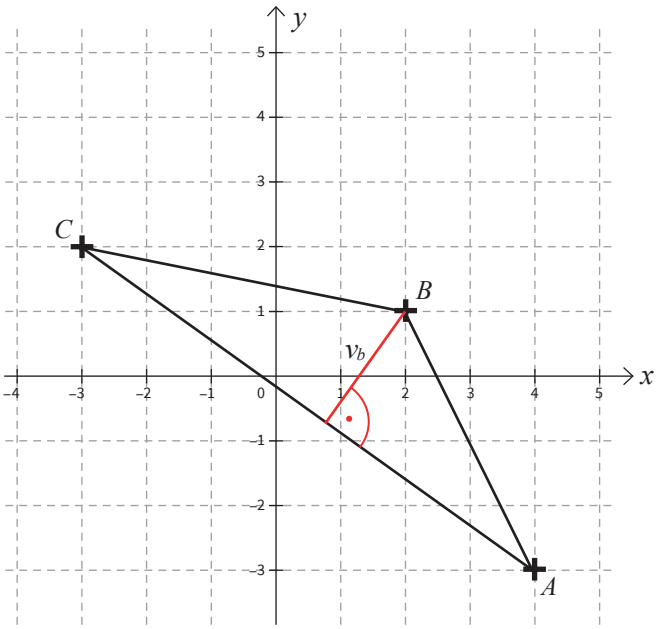
$\vec{u} = (7; -5)$, $\vec{v} = (5; -1)$

Použijeme vzorec pro výpočet úhlu dvou vektorů:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{35 + 5}{\sqrt{49 + 25} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$$

$\gamma = 24°14'$

Velikost výšky v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC.



Při výpočtu $\cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{40}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$

není vhodné poslední hodnotu zapisovat, ponecháme ji v paměti kalkulátoru a rovnou určíme γ. Je-li nutné ji zapsat (a přitom zaokrouhlit), je pro požadovanou přesnost nutné zaokrouhlit alespoň na 4 desetinná místa.

Pozn.: V analytické geometrii obvykle zapisujeme vzdálenosti bez konkrétních jednotek. V této úloze je tedy hledaná vzdálenost rovna 2,1 jednotek – rozumí se jednotky použité souřadnicové soustavy.

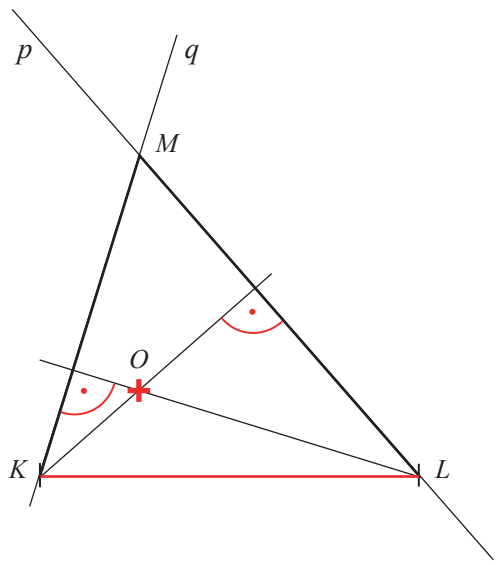
Směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{u} = A - C = (7;\ -5)$, přímka AC má tedy obecnou rovnici $5x + 7y + c = 0$, konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu A (případně C): $5\cdot 4 + 7\cdot(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 1$, tedy $\leftrightarrow AC$: $5x + 7y + 1 = 0$.

Použijeme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu B od přímky:

$$v_b = v\,(B, \leftrightarrow AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5\cdot 2 + 7\cdot 1 + 1|}{\sqrt{5^2+7^2}} = \frac{18}{\sqrt{74}} = \frac{18\sqrt{74}}{74} = \frac{9\sqrt{74}}{37} \doteq 2{,}1$$

Úhel při vrcholu C má velikost 24°14' a výška v_b má velikost přibližně 2,1 (jednotek).

15 Předpokládáme, že existuje požadovaný trojúhelník – načrtneme ho, vyznačíme zadané prvky.



Hledáme bod M:

$M \in p\ (p \perp\leftrightarrow KO \wedge L \in p)$
(čteme: M leží na přímce p, která je kolmá k přímce KO a prochází bodem L)

$M \in q\ (q \perp\leftrightarrow LO \wedge K \in p)$
(čteme: M leží na přímce q, která je kolmá k přímce LO a prochází bodem K)

Tedy $M \in p \cap q$

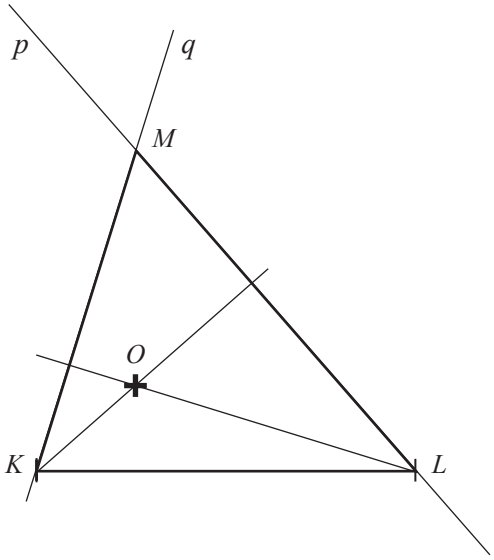
Provedeme konstrukci:

1.) $p; p \perp\leftrightarrow KO \wedge L \in p$

2.) $q; q \perp\leftrightarrow LO \wedge K \in p$

3.) $M; M \in p \cap q$

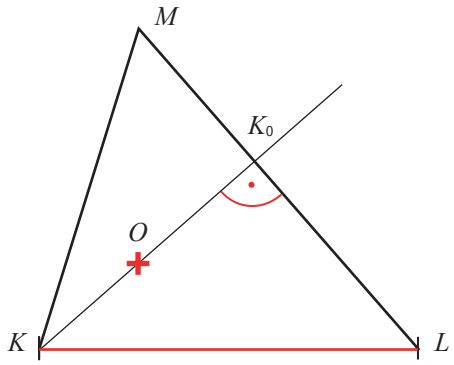
4.) ΔKLM

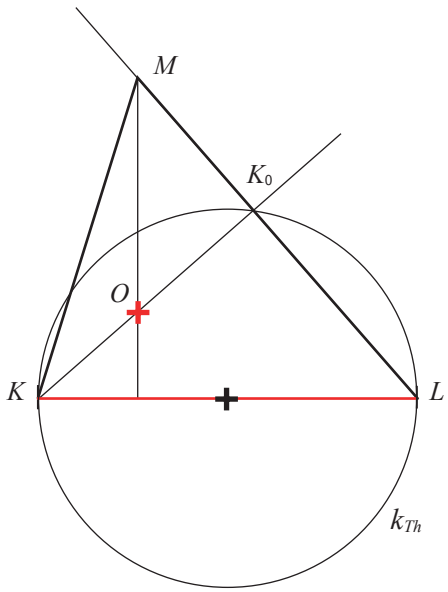


Úloha má v rovině jedno řešení.

Jiný způsob řešení:

Trojúhelník načrtneme, pojmenujeme patu výšky K_0.





Rozbor úlohy:

Neznámé body jsou K_0 a M.

Určíme nejprve bod K_0:

- K_0 je pata výšky z vrcholu K, musí ležet na polopřímce KO … $K_0 \in\rightarrow KO$
- Úhel u K_0 je pravý, bod K_0 musí ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou KL … $K_0 \in k_{Th}(KL)$
- $K_0 \in\rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$

Dále hledáme bod M:

- M leží na kolmici p vedené bodem O k úsečce KL (její částí je výška v_m)
- M leží na polopřímce LK_0
- $M \in\rightarrow p \cap\rightarrow LK_0$

Provedeme konstrukci:

1.) $\rightarrow KO$

2.) $k_{Th}(KL)$

3.) $K_0; K_0 \in \rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$

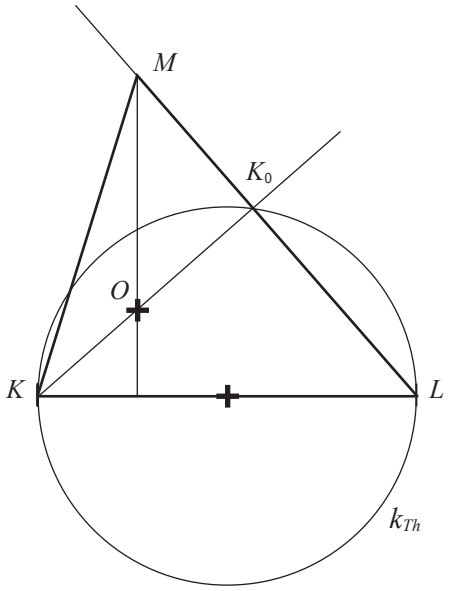
4.) $p; O \in p, p \perp KL$

5.) $\rightarrow LK_0$

6.) $M; M \in p \cap \rightarrow LK_0$

7.) ΔKLM

Úloha má v rovině jedno řešení.



Náčrt provádíme tužkou „od ruky“. Je dobře barevně vyznačit známé prvky. Konstrukci provádíme pečlivě – ořezanou tužkou, použijeme pravítko, kružítko s ořezanou tuhou, případně úhloměr.
Poznámka: V „ostrých“ maturitních testech je nutné v záznamovém archu všechny čáry obtáhnout propisovací tužkou – záznamové archy se pro účely opravování skenují a na naskenovaném obrázku není obyčejná tužka dobře viditelná.

16 Pro dláždění dna bazénu bude potřeba 450 : 30 = 15 dlaždic v jedné řadě (podél delší stěny bazénu).

Stejných takových řad je nutno položit 300 : 30 = 10.

Na vydláždění dna bazénu je potřeba 15 · 10 = 150 dlaždic.

Pro dláždění kratší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 300 : 30 = 10 dlaždic.

Na vydláždění obou kratších stěn potřebujeme 2 · 4 · 10 = 80 dlaždic.

Pro dláždění delší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 450 : 30 = 15 dlaždic.

Na vydláždění obou delších stěn potřebujeme 2 · 4 · 15 = 120 dlaždic.
Pro celý bazén potřebujeme 150 + 80 + 120 = 350 dlaždic.

Počet balení získáme vydělením celkové spotřeby dlaždic počtem dlaždic v jednom balení 350 : 12 = 29,2, zaokrouhlíme nahoru na 30. D)

Můžeme řešit i tak, že vypočítáme obsah dna a stěn bazénu v cm² a tento vydělíme obsahem jedné dlaždice.
$S = (450 \cdot 300) + 2 \cdot (300 \cdot 120) + 2 \cdot (450 \cdot 120) = 3\,15000$
$350 : (30 \cdot 30) = 350$
Při tomto způsobu výpočtu je potřeba dát pozor na to, jestli dlaždice nebude nutné řezat, tedy jestli všechny rozměry dlážděných obdélníků jsou celočíselnými násobky délky strany čtvercové dlaždice.

17 Upravíme výraz V: $V = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2} = \frac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{x+3}{2x+2}$ B)

Čitatel rozložíme užitím Vietových vzorců. Pro kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ platí $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Snadno uhádneme (a ověříme), že $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, a proto lze trojčlen $x^2 + 2x - 3$ rozložit na součin $(x+3)(x-1)$.

18 Předpis A zadává lineární funkci, jejím grafem je přímka – možnost A vyloučíme.

Předpis B zadává kvadratickou funkci, jejím grafem je parabola – možnost B vyloučíme.

Předpis C zadává exponenciální funkci, která nikdy nenabývá záporných hodnot, žádná část jejího grafu nemůže ležet pod souřadnicovou osou x – možnost C vyloučíme.

Předpis E zadává lineární lomenou funkci, jejím grafem je hyperbola (se dvěma větvemi), navíc $f(0) = (0+1)^{-1} = 1 \neq 0$, možnost E vyloučíme.

Zbývá možnost D), pro jistotu ještě ověříme:

$f: y = \log_2(x+1)$

je definována pro $x+1 > 0$, tedy pro $x > -1$, odpovídá funkci na obrázku

$x = 0 \Rightarrow y = \log_2 1 = 0$, odpovídá funkci na obrázku

$x = 1 \Rightarrow y = \log_2 2 = 1$, odpovídá funkci na obrázku

$x = 3 \Rightarrow y = \log_2 4 = 2$, odpovídá funkci na obrázku

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$, odpovídá funkci na obrázku

19 Rovnice A) a C) mají záporný diskriminant, nemají žádný reálný kořen. Zbývá otestovat rovnice B) a D). Můžeme to udělat dvěma způsoby:

Vzorec pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$.

Je-li D kladné, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

1. Dosadíme číslo a do výrazu na levé straně rovnice:

$$L_B(a) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 4 + 4\sqrt{3} \neq 0$$

$$L_D(a) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

2. Řešíme rovnice B) a D) užitím diskriminantu:

$$D_B = 4 + 8 = 12,\ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \neq a$$

$$D_D = 4 + 8 = 12,\ x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

20 Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy je nutné splnit podmínku

$\frac{x-3}{x} \geq 0$. Navíc číslo ve jmenovateli zlomku musí být různé od nuly, tedy $x \neq 0$.

Nerovnici $\frac{x-3}{x} \geq 0$ budeme řešit pomocí nulových bodů ($x_{01} = 0$, $x_{02} = 3$) a tabulky pro znaménka čitatele a jmenovatele.

Definiční oborem funkce je sjednocení intervalů $(-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$. C)

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3\rangle$	$\langle 3; -\infty\rangle$
x	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$\frac{x-3}{x}$	+	−	+

Jiný způsob řešení nerovnice $\frac{x-3}{x} \geq 0$:
Po stanovení podmínek ($x \neq 0$) můžeme obě strany nerovnice násobit číslem x^2, které je jistě větší než nula, znak nerovnosti se zachová. Získáme nerovnici $(x-3) \cdot x \geq 0$, kterou umíme vyřešit užitím grafu kvadratické funkce $f: y = (x-3) \cdot x$, tedy kvadratické funkce $f: y = x^2 - 3x$.
Víme, že grafem je parabola „otevřená nahoru" a protínající osu x v bodech 0 a 3, odtud $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle \infty; 0)$, po přihlédnutí k podmínkám $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$.

21 Ze vztahu $m = \frac{t}{a+b}$ chceme vyjádřit neznámou a.

$m = \frac{t}{a+b} \quad / \cdot (a+b)$

$m(a+b) = t$

$ma + mb = t \quad / -mb$

$ma = t - mb \quad / : m$

$a = \frac{t-mb}{m}$ B)

Podmínka $a \neq -b$ pro existenci výrazu je splněna automaticky, protože se jedná o kladná čísla a a b, stejně tak podmínka $m \neq 0$.

22 Určíme, kolikrát nejvýše mohl být Mirek v posilovně. Průměrně 6 návštěv na každého z 6 kamarádů znamená, že dohromady vykonali 36 návštěv. Mirkovi z nich by připadl největší počet návštěv tehdy, když počet návštěv všech ostatních kamarádů bude co nejmenší. Protože má každý jiný počet návštěv, budou počty návštěv posilovny pro jednotlivé kamarády vyjádřeny nejmenšími přirozenými čísly: 1; 2; 3; 4; 5. Všichni kromě Mirka společně vykonali alespoň 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 návštěv, Mirek mohl vykonat maximálně 36 − 15 = 21 návštěv a utratit tak maximálně 2 100 Kč. A)

23 Počty uběhnutých kilometrů v jednotlivých dnech tvoří aritmetickou posloupnost (každý den navyšuje o stejnou vzdálenost), jejíž první člen je $a_1 = 3$ a šestnáctý člen $a_{16} = 6$. Diference je rovna délce jednoho oválu a vypočítáme ji ze vztahu pro n-tý (šestnáctý) člen aritmetické posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $a_{16} = a_1 + 15d$.

Dosadíme: $6 = 3 + 15d$ a vypočítáme diferenci $d = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (km).

Potřebujeme sečíst prvních 31 členů této posloupnosti, použijeme vzorec pro součet prvních n členů

$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$, tedy $s_{31} = (a_1 + a_{31}) \cdot \frac{31}{2}$. Chybí nám člen a_{31} - vypočítáme ho podle již použitého vzorce pro n-tý člen

$a_{31} = a_1 + 30d = 3 + 30 \cdot \frac{1}{5} = 9$.

$s_{31} = (3 + 9) \cdot \frac{31}{2} = 186$

Pan Rychlý naběhal během března 186 kilometrů. E)

24 Provedeme konstrukci:

24.1 Žádná mocnina čísla 9 není rovna 0, rovnice I. nemá vůbec žádné řešení. A N

24.2 $|x-5| = 4 \Rightarrow x-5 = 4 \vee x-5 = -4 \Rightarrow x = 9 \vee x = 1$. A N

Rovnice II. má dvě řešení, ani jedno z nich není záporné.

24.3 $\sqrt{x+6} = 2 \Rightarrow x+6 = 4 \Rightarrow x = -2$. Kořen −2 je nutno ověřit zkouškou: $\sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2$. A N

Rovnice III. má jeden záporný kořen.

24.4 $5 = (x-1)^2 - x(x+3) \Rightarrow 5 = x^2 - 2x + 1 - x^2 - 3x \Rightarrow 5 = -5x + 1 \Rightarrow 4 = -5x \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$. A N

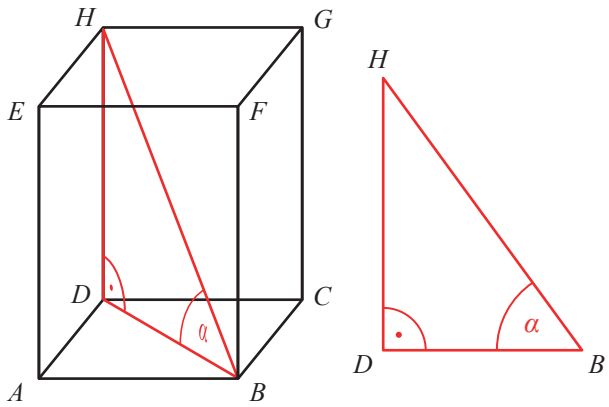
Rovnice IV. má jeden záporný kořen.

25 25.1 Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku BHD (s pravým úhlem při vrcholu D).

Označíme $\alpha = \measuredangle BHD$.

$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

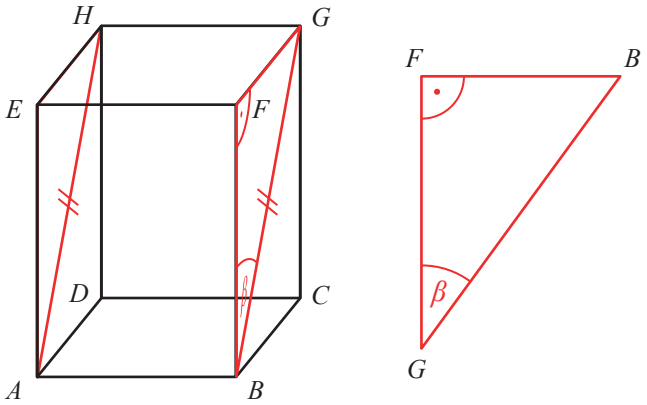
B)



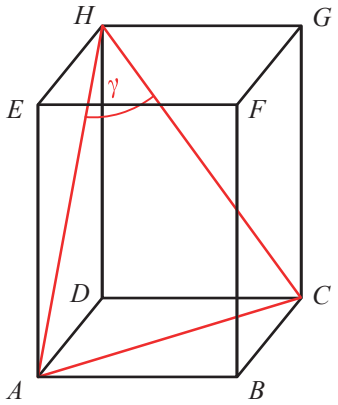
25.2 Odchylka mimoběžek $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow AH$ je rovna velikosti úhlu FBG, protože přímka BF je rovnoběžná s přímkou AH. Označíme $\beta = \measuredangle FBG$ a kosinus vypočteme užitím pravoúhlého trojúhelníku BGF.

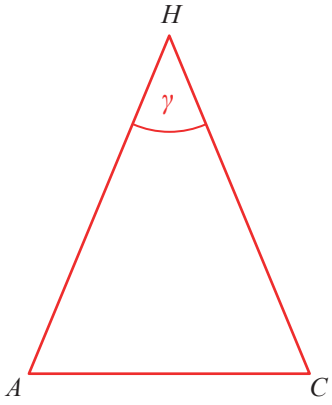
$$\cos\beta = \frac{|BF|}{|BG|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

E)



25.3 Velikost úhlu $\gamma = \measuredangle AHC$ bychom počítali z rovnoramenného trojúhelníku ACH s hlavním vrcholem H.





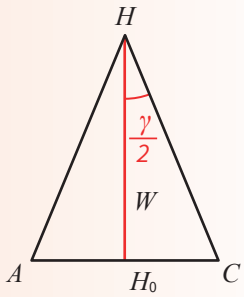
Protože je požadován kosinus úhlu γ, použijeme kosinovou větu:

$|AC|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2 \cos\gamma$,

po dosazení $8 = 40 - 40 \cdot \cos\gamma$, tedy $\cos\gamma = \frac{4}{5}$ A)

*V části 3 je třeba si uvědomit, že trojúhelník ACH **není pravoúhlý**, nelze proto použít definici kosinu jako poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku.*

V úloze III. bychom samozřejmě mohli rovnoramenný trojúhelník ACH rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, pomocí nichž lze vypočítat velikost úhlu $\frac{\gamma}{2}$.



Tento výpočet je podstatně náročnější a nevede přímo k požadovanému kosinu, proto ho zde nebudeme uvádět.

26 26.1 $8a - 2a^3 \geq 0$

$8a - 2a^3 = a(8 - 2a^2) = 2a(4 - a^2) = 2a(2 - a)(2 + a)$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	$(2; \infty)$
$2a$	–	– ●	+	+
$2 - a$	+	+	+ ●	–
$2 + a$	– ●	+	+	+
$2a(2 - a)(2 + a)$	+	–	+	–

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$

B)

Výraz rozložíme na součin užitím vzorců, určíme nulové body a posoudíme znaménko výrazu v intervalech mezi nulovými body. Krajní body příslušných intervalů zahrneme do hledané množiny, pokud je v tomto bodě výraz definován.

26.2 $\underbrace{(a^2+1)}_{\text{vždy kladné}} \cdot (a^2+a-2) \geq 0$

$a^2+a-2 \geq 0$

$(a+2)(a-1) \geq 0$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$a+2$	−	+	+
$a-1$	−	−	+
$(a+2)(a-1)$	+	−	+

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

E)

26.3 $-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \geq 0$

$-a^2 - 2a - 2 \geq 0 \quad /:(-1)$

$a^2 + 2a + 2 \leq 0$

$$\frac{-1}{2a^2-a-1} \geq 0$$

$$\frac{-1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \geq 0$$

$$\frac{1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Připomeňte si vzorce pro rozklad výrazů na součin:
- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A-B)(A^2-AB+B^2)$

Pozor u B: Výraz $1 + 2a + 4a^2$ není druhá mocnina dvojčlenu $\left((1+2a)^2 = 1 + 4a + 4a^2\right)$.

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; 1)$	$(1; \infty)$
$a-1$	−	−	+
$a+\frac{1}{2}$	−	+	+
$(a-2)(a+1)$	+	−	+

$a \in (-\frac{1}{2}; 1)$

F)

26.4 $\frac{a^2-4}{-1} \geq 0$

$4 - a^2 \geq 0$

$(2-a)(2+a) \geq 0$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2-a$	+	+	−
$2+a$	−	+	+
$(2-a)(2+a)$	−	+	−

$a \in \langle -2; 2\rangle$

C)

ŘEŠENÍ – TEST 2

1 $y = \frac{3}{5}x$

$x - y = 5,6$

$x - \frac{3}{5}x = 5,6$

$\frac{2}{5}x = 5,6$

$x = 5,6 \cdot \frac{2}{5} = 14$

$y = \frac{3}{5} \cdot 14 = \frac{42}{5} = 8,4$

$\boldsymbol{y = 8,4}$

Zapíšeme údaje z úlohy. Soustavu rovnic vyřešíme dosazovací metodou.

2 $0,2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$

$0,2 \cdot 10^{4x-7} = 200$

$10^{4x-7} = \frac{200}{0,2}$

$10^{4x-7} = 1000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

Zk.:

$L\left(\frac{5}{2}\right) = 0,2 \cdot 10^{4 \cdot \frac{5}{2} - 7} - 200 = 0,2 \cdot 10^3 - 200 = 200 - 200 = 0$

$P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$

Lze použít substituci $t = 4x - 7$ a řešit rovnici $0,2 \cdot 10^t - 200 = 0$. Dostaneme $10^t = 1000$, $t = 3$ a po dosazení zpět do rovnice substituce $3 = 4x - 7$, tedy $x = \frac{5}{2}$.

Zkouška v tomto případě není nutnou součástí řešení, žádnou z užitých úprav jsme nemohli ztratit žádný kořen ani získat žádný navíc. Pokud by nám zkouška „nevyšla“, je nutno v řešení hledat (vlastní) chybu.

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0'$

$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

$-k + 28 = 0$

$\boldsymbol{k = 28}$

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule. Dále počítáme podle definice.

4 $112 \cdot 0,75 = 84$

$84 \cdot \frac{2}{3} = 56$

Vykvetlo **56** červených tulipánů.

Vypočítáme počet všech vykvetlých tulipánů. Z počtu kvetoucích připadají na červené dvě třetiny.

5 $s_8 = (a_1 + a_8) \cdot \frac{8}{2}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_8 = 11 + 28 = 39$

$s_8 = (11 + 39) \cdot 4 = 200$

V hledišti divadla je **200 sedadel**.

Počty sedadel v řadách tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$, její první člen je roven $a_1 = 11$. Počet členů posloupnosti je 8. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti - $a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Neznáme osmý člen a_8, vypočteme ho podle vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n + 1)$ a dosadíme do vzorce pro součet.

6 $m = xy + 2(x + y)k$

$m = xy + 2xk + 2yk$

$m - 2yk = xy + 2xk$

$m - 2yk = x(y + 2k)$

$\mathbf{\frac{m - 2yk}{y + 2k} = x}$

Z daného vzorce chceme vyjádřit veličinu x. Nejprve je nutné roznásobit závorku. Členy, které obsahují požadovanou veličinu, ponecháme na jedné straně rovnice, ostatní „převedeme“ na druhou stranu rovnice. (Odečteme od obou stran rovnice výraz $2yk$.)
Vytkneme požadovanou veličinu. Obě strany rovnice vydělíme výrazem v závorce. (Protože se jedná o kladné veličiny, výraz nikdy nebude roven 0, můžeme dělit bez jakýchkoli omezení).

7 $x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}; D \in R / \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

$\frac{2x - 1}{3x - 1} = \frac{2x}{3x + 1}$

$(2x - 1)(3x + 1) = 2x(3x - 1)$

$6x^2 - 3x + 2x = 6x^2 - 2x$

$\mathbf{x = 1}$

$1 \in D$

$\mathbf{K = \{1\}}$

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem obou jmenovatelů (úprava je ekvivalentní v definičním oboru rovnice). Pokud bychom na začátku podmínky nenapsali a rovnici řešili v R, není jisté, že nenásobíme nulou a na konci bychom museli udělat zkoušku. Vypočítáme $x = 1$.
Kořen vyhovuje stanoveným podmínkám, proto může být řešením rovnice. Bez podmínek na začátku by bylo nutné provést zkoušku:

$L(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(1) = P(1) \Rightarrow 1 \in K$

8 $p' = 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 0{,}6375$ (procent)

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}6375}{100}\right)^5 = 25807$$

Banka by vyplatila **25807 Kč**.

Vypočítáme reálnou („čistou“) úrokovou míru p', tedy úrok po odečtení 15% daně.
Částka na účtu vzrůstá pravidelně každý rok o stálý počet procent p' – použijeme vzorec pro pravidelný růst veličiny V:

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5$$

9 x ... počet dívek ve třídě 4C

$2x$ ... počet chlapců ve třídě 4C

$x + 2x$ ... počet všech žáků třídy 4C

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{3x}{2}} = 0{,}1$$

$$\frac{x(x-1)}{3x(3x-1)} = 0{,}1$$

$$\frac{x-1}{3(3x-1)} = 0{,}1$$

$x - 1 = 0{,}3(3x - 1)$

$10x - 10 = 9x - 3$

$\boldsymbol{x = 7}$

Zkontrolujeme správnost úvah a výpočtu podle textu úlohy:

Ve třídě je 7 dívek a 14 chlapců, vypočítáme pravděpodobnost, že v náhodně vybrané dvojici budou jen dívky:

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{21}{210} = 0{,}1 \text{ (vyhovuje zadání).}$$

Ve třídě je **7 dívek**.

Označíme počet dívek ve třídě proměnnou x, pomocí ní vyjádříme i další údaje.

Vyjádříme pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvojice osob je složená jen z dívek. Jmenovatel zlomku vyjadřuje počet všech způsobů, jak vybrat dvojici osob ze třídy, ve které je x dívek a $2x$ chlapců, celkem $3x$ žáků (tvoříme neuspořádané dvojice z $3x$ žáků, tedy dvojčlenné kombinace z $3x$ prvků), těch je $\binom{3x}{2}$.

V čitateli je počet možností, jak dvojici vytvořit jen z dívek $\binom{x}{2}$.

Vypočítáme kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vyřešíme rovnici.

10 $\sin\alpha = \frac{u}{a} = \frac{7}{11}$

$\boldsymbol{\alpha = 39° \, 31'}$

$o = 2(a + b)$ $(b = |BC| = |AD|)$

$a^2 = u^2 + b^2$

$b^2 = a^2 - u^2 = (121 - 49)\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2$

$b = \sqrt{72}\text{ cm} = 6\sqrt{2}\text{ cm}$

$o = 2(11 + 6\sqrt{2})\text{ cm} \doteq$ **39, 0 cm**

Úhel α má velikost 39° 31´, obvod kosodélníku je 39,0 cm.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme sinus úhlu α. K určení α použijeme kalkulačku (tlačítko většinou označeno $\sin^{-1}$ nebo arcsin podle typu kalkulátoru). K výpočtu obvodu je nutné vypočítat délku strany AD, můžeme využít Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

Pozor na správné zaokrouhlení výsledku 38,97na jedno desetinné místo.

11 $x \neq 2; D \in R / \{2\}$

$$\frac{x}{x-2} \leq 1$$

$$\frac{x}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{2}{x-2} \leq 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

$$\boldsymbol{K = (-\infty; 2)}$$

Nerovnice má neznámou ve jmenovateli, je nutné zapsat definiční obor nerovnice. Nerovnici převedeme na podílový tvar s nulou na pravé straně nerovnice – od obou stran nerovnice odečteme jedničku, pak výrazy na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel. Čitatel získaného zlomku je kladný - aby zlomek mohl být menší nebo roven nule, musí jmenovatel zlomku být záporný.

***Pozor** – ve snaze zbavit se zlomku není možné v R násobit nerovnici jmenovatelem – nevíme, zda výraz $x - 2$ není záporný.*

12 $$\left(3a - \frac{6a-1}{3a}\right) \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2 - (6a-1)}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$

$$= \frac{9a^2 - 6a + 1}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{(3a-1)^2}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3a-1}{3a}}$$

Podmínky: $a \neq 0; a \neq \frac{1}{3}$

Závorka určuje prioritu operací – výrazy v závorce převedeme na společný jmenovatel. V čitateli prvního zlomku odstraníme závorku a podle vzorce $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu. Závorkou $(3a - 1)$ zkrátíme a zapíšeme výsledek.
***Pozor** – dále krátit nelze, v čitateli je rozdíl, nikoli součin. Jmenovatel žádného zlomku nesmí být roven nule, tedy $3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ a $3a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{3}$*

13 $|3x - 2| = x + 6$

$$3x - 2 \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{3} \iff x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right), \quad 3x - 2 < 0 \iff x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$$

1. pro x z intervalu $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$$|3x - 2| = -(3x - 2) = -3x + 2$$
$$-3x + 2 = x + 6$$
$$-4x = 4$$
$$x = -1$$

$$-1 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right), K_1 = \{-1\}$$

2. V $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$:

$$|3x - 2| = 3x - 2$$
$$3x - 2 = x + 6$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

$$4 \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right), K_2 = \{4\}$$

$$\boldsymbol{K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 4\}}$$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu v rovnici, použijeme definici absolutní hodnoty reálného čísla ($a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$). Řešení rovnice rozdělíme do dvou intervalů podle znaménka argumentu („vnitřku“) absolutní hodnoty. Řešíme dvě lineární rovnice již bez absolutní hodnoty. Je nutné se přesvědčit, zda vypočtený kořen patří do intervalu, v němž právě řešíme. Množinu kořenů v R dostaneme jako sjednocení množin kořenů v jednotlivých intervalech. Pozn.: Abychom získali dva intervaly, na nichž všechny kroky provádíme, hledáme vlastně nulové body výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

14 x ... počet hodin, který potřebuje pan Novák na posekání celé zahrady

y ... počet hodin, který potřebuje paní Nováková k posekání celé zahrady

Za jednu hodinu poseká pan Novák $\frac{1}{x}$ a paní Nováková $\frac{1}{y}$ zahrady.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$3 \cdot \frac{1}{x} = 4 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{(4 \cdot \frac{1}{y})}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{3y}$$

$$\frac{4}{3y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{3y} = \frac{1}{12}$$

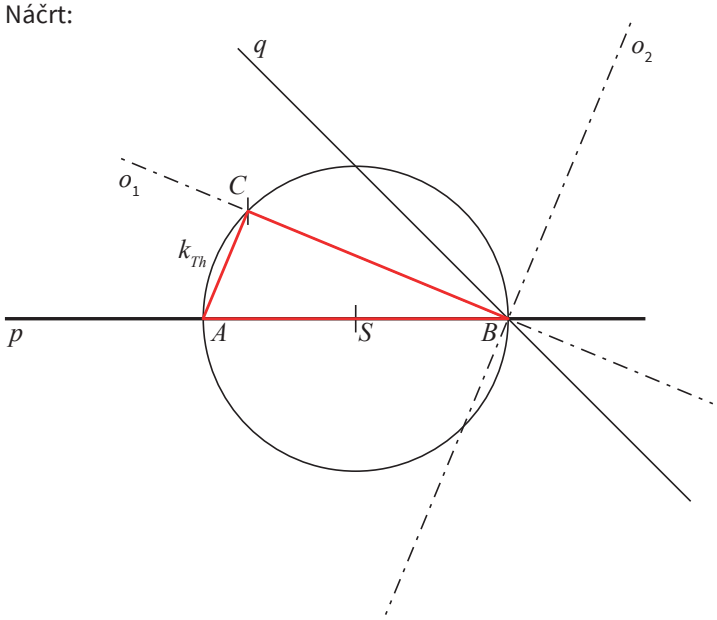
$y = 28$ (hodin)

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{3 \cdot 28} = \frac{1}{21}$$

$x = 21$ (hodin)

Označíme neznámé veličiny v úloze.
Sestavíme rovnice z údajů v úloze:
Budou-li pan a paní Novákovi pracovat společně jednu hodinu, posekají dohromady $\frac{1}{12}$ zahrady.
Druhá rovnice vyjadřuje rovnost posekané plochy paní Novákovou za 4 a panem Novákem za 3 hodiny.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou, z druhé rovnice stačí vyjádřit výraz $\frac{1}{x}$ a dosadit do první.
Vypočítáme y, pak $\frac{1}{x}$ a odtud x.
Zkontrolujeme, zda vypočtené hodnoty odpovídají textu úlohy – paní Nováková poseká zahradu za 28 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{28}$ zahrady a za 4 hodiny $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ zahrady.
Pan Novák poseká zahradu za 21 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{21}$ zahrady a za 3 hodiny $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ zahrady.
Budou-li pracovat společně, posekají za 1 hodinu $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{4+3}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{12}$ zahrady.
Nezapomeňte na slovní odpověď.

15 Náčrt:



Bod C má mít stejnou vzdálenost od dvou přímek p a q. Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek, jsou dvě přímky, na nichž leží osy úhlů sevřených těmito různoběžkami (obě přímky procházejí průsečíkem daných různoběžek a jsou na sebe kolmé).

Trojúhelník ABC má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C – proto musí bod C ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB.

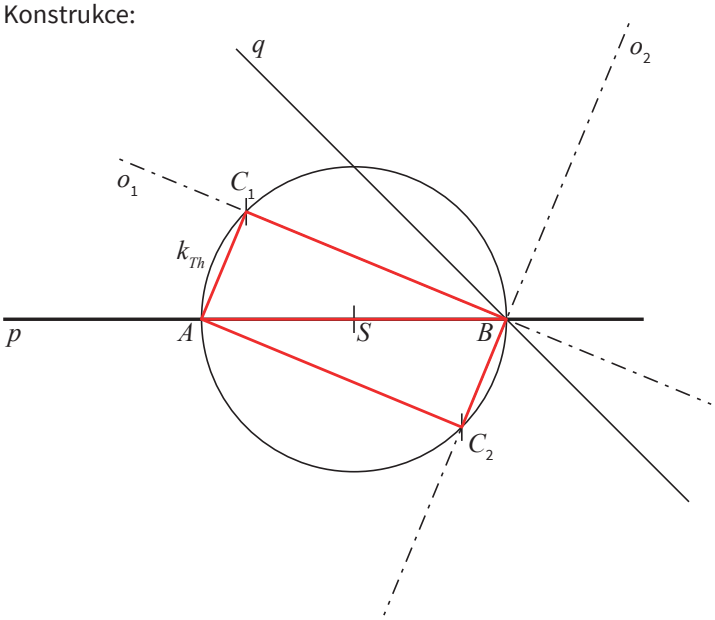
Rozbor:

$|Cp| = |Cq| \Rightarrow C \in o_1 \cup o_2$

$|\measuredangle ABC| = 90° \Rightarrow C \in k_{Th}(AB)$

$C \in k_{Th}(AB) \cap (o_1 \cup o_2)$

Konstrukce:



Pozor – střed úsečky určíme konstrukčně pomocí dvou kružnic se stejnými poloměry a středy v bodech A a B.

Popis konstrukce:

1. S; S je střed AB
2. k_{Th}; $k_{Th}\left(S; r = \frac{r}{2}\right)$
3. o_1, o_2; o_1, o_2 jsou osy úhlů sevřených přímkami p a q
4. C_1; $C_1 \in o_1 \cap k_{Th}$
5. C_2; $C_2 \in o_2 \cap k_{Th}$
6. $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$

Úloha má dvě řešení.

16 $2x - a = 0$

$x = \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = -2$

$a = -4$ D)

Zapíšeme podmínky pro existenci výrazu v předpisu funkce f:

$2x - a \neq 0$, tedy $x \neq \frac{a}{2}$.

Z uvedeného definičního oboru plyne $x \neq -2$. Porovnáme obě podmínky, tedy

$\frac{a}{2} = -2$ a zároveň $a = -4$.

17 $q: y = \frac{2}{3}x + b$

$M \in q \Rightarrow -1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$

$q: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$q: \frac{2}{3}x - y - \frac{7}{3} = 0$

q: $2x - 3y - 7 = 0$ B)

Přímka p je dána směrnicovou rovnicí, směrnice přímky p je rovna $\frac{2}{3}$.

Rovnoběžné přímky mají stejné směrnice, proto i směrnice hledané přímky q bude rovna $\frac{2}{3}$. Přímka q bude tedy mít rovnici

$q: y = \frac{2}{3}x + b$.

Koeficient b určíme využitím souřadnic bodu M, který má na přímce q ležet, jeho souřadnice musí tedy vyhovovat rovnici přímky q.
Získali jsme směrnicovou rovnici přímky q, převedením rovnice na anulovaný tvar dostaneme obecnou rovnici přímky q.
Vynásobením obou stran rovnice třemi získáme všechny koeficienty celočíselné.

18 $a = 45$ cm, $b = 25$ cm, $v = 25$ cm, $V_1 = 18$ l $= 18$ dm$^3 = 18000$ cm^3

$V_1 = a \cdot b \cdot v_1$

$18000 \text{ cm}^3 = 45 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \cdot v_1$

$v_1 = \frac{18000}{45 \cdot 25} \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

$v - v_1 = 25 \text{ cm} - 16 \text{ cm} =$ **9 cm** B)

Voda po nalití do akvária bude mít tvar kvádru s rozměry a, b, v_1. Dosazením do vzorce pro objem kvádru zjistíme neznámý třetí rozměr kvádru v_1.
Před dosazením vyjádříme objem v cm^3 podle vztahu 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.
Vypočítáme vzdálenost vodní hladiny od horního okraje akvária.

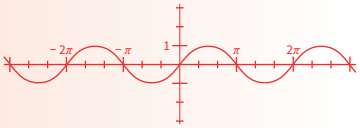
19 **$A = 2$**

$B = 3$

$C = -1$

E)

Graf funkce f: $y = A \cdot \sin(Bx) + D$ sestrojíme modifikací grafu funkce $y = \sin x$.



Konstanty A a B ovlivňují „tvar“ křivky.
A určuje amplitudu – „roztažení“ ve svislém směru, pro funkci f $A = 2$ (amplituda funkce $y = \sin x$ je 1).
B určuje periodu – roztažení ve vodorovném směru, perioda funkce f je $\frac{2}{3}\pi$, proto $B = 3$ (podle vztahu $p = \frac{2\pi}{B}$, perioda funkce $y = \sin x$ je 2π).
Konstanta D určuje „posun“ grafu ve směru osy y, pro funkci f je posun o 1 ve směru záporné osy y („dolů“), proto $D = -1$.

20 $y = \binom{10}{6} \cdot 6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$ C)

Nejprve vybereme („označíme“) sedadla, která turisté obsadí – vybíráme 6 sedadel z 10 nezávisle na pořadí výběru, tedy tvoříme šestičlenné kombinace z 10 prvků, jejich počet vyjadřuje kombinační číslo $\binom{10}{6}$.

Potom začneme sedadla „obsazovat“ turisty – každému sedadlu „přidělíme“ jednoho turistu (představte si vybraná sedadla v řadě a jen měníme pořadí osob) - tvoříme permutace z 6 prvků, těch je (pro každý výběr sedadel) 6!. Násobíme podle kombinatorického pravidla součinu.
Jiný způsob uvažování (pro pokročilejší):
Tvoříme permutace s opakováním z 10 prvků, z nichž 4 jsou stejné (celkem 10 sedadel, 6 z nich obsadíme „rozlišitelnými“ turisty a 4 zůstanou prázdná – nerozlišitelná).
Jejich počet je pak $\frac{10!}{4!}$.

21 $a_1 = k \cdot a = k \cdot 12,5$ cm

$b_1 = k \cdot b = k \cdot 10$ cm

$c_1 = k \cdot c = k \cdot 8,5$ cm

$a_1 - c_1 = 4,8$ cm

$k \cdot 12,5 \text{ cm} - k \cdot 8,5 \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$

$4k \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$

$k = \frac{4,8}{4} = \frac{6}{5}$

$b_1 = \frac{6}{5} \cdot 10 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ D)

Pro podobné trojúhelníky platí, že odpovídající si strany jsou ve stejném poměru.

Využijeme údaj o rozdílu nejdelší a nejkratší strany, sestavíme a vyřešíme rovnici pro koeficient podobnosti k.

Dopočítáme délku prostřední strany b.

22 $\frac{s_4}{s_6} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$ C)

Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit třemi úhlopříčkami (AD, BE, CF) na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Úsečky BD a DF vždy dva z těchto trojúhelníků půlí, proto obsah trojúhelníku BCD i obsah trojúhelníku DEF je roven obsahu každého ze zmiňovaných rovnostranných trojúhelníků. Obsah čtyřúhelníku ABDF je tedy rovný $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ obsahu šestiúhelníku.

Jiné řešení: Čtyřúhelník ABDF lze rozdělit na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABF, BSF, BDS, FDS. Do celého šestiúhelníku zbývají ještě dva shodné trojúhelníky (BCD a DEF), proto je poměr obsahů

$\frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

23 $2s_1 - s_2 + 12 = 0$

$s_1 = -3 + 2t$

$s_2 = 1 - t$

$2(-3 + 2t) - (1 - t) + 12 = 0$

$t = -1$

$s_1 = -3+2t \cdot (-1) = -5$

$s_2 = 1-(-1) = 2$

$S\,[-5; 2]$

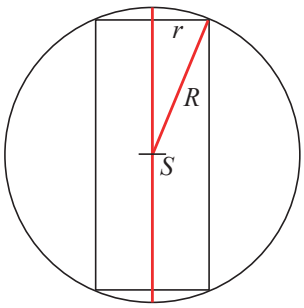
$r_k = |ST| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-3)^2} = \mathbf{\sqrt{10}}$ A)

Poloměr kružnice můžeme určit jako vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu. Bod T na kružnici k známe, proto stačí najít střed kružnice k, který je průsečíkem přímek p a q.

Průsečík přímek je bod, jehož souřadnice musejí vyhovovat rovnicím obou přímek, tedy obecné rovnici přímky p i parametrickému vyjádření přímky q. Označíme jeho souřadnice $S[s_1; s_2]$ a dosadíme je do daných rovnic. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešit budeme dosazovací metodou (využijeme vyjádřené s_1 a s_2 v druhé a třetí rovnici a dosadíme do první).

Délku úsečky ST počítáme podle vzorce:
$|ST| = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2}$

24



Načrtneme osový řez koule a vepsaného válce, označíme v výšku válce.

24.1

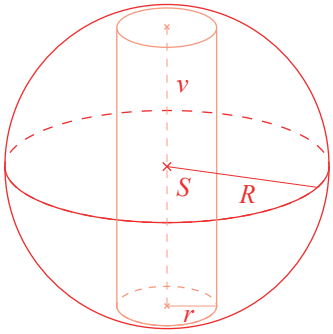
$R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$26^2 = 10^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$

$\frac{v}{2} = 24$

$v = 48$ cm



A N

24.2

$S_{po} = \pi r^2 = \pi \cdot 100\ \text{cm}^2$

$S_{pl} = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 10 \cdot 48 = 960\pi$ cm

$\frac{S_{pl}}{S_{po}} = \frac{960\pi}{100\pi} = \mathbf{9,6}$

A N

24.3

$V_V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 10^2 \cdot 48 = 4800\pi\ \text{cm}^3$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 26^3 = \frac{70304}{3}\pi\ \text{cm}^3$

$\frac{V_V}{V_K} = \frac{4800\pi}{\frac{70304}{3}\pi} \doteq \mathbf{0,20}$

A N

24.4

$S_K = 4\pi R^2 = 4\pi\ 26^2 = 2704\pi\ \text{cm}^2$

$\frac{S_K}{S_{pl}} = \frac{2704\pi}{960\pi} \doteq \mathbf{2,8 > 2}$

A N

Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami r a $\frac{v}{2}$.

Podstavou válce je kruh, dosazením do vzorce $S_{po} = \pi r^2$ vypočítáme její obsah. Plášť válce je vlastně obdélník, jehož šířka je rovna obvodu podstavy ($o = 2\pi r$) a výška je rovna výšce válce.

Pro porovnání objemu válce a koule vypočteme jejich objemy podle vzorců
$V_V = \pi r^2 \cdot v$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

Porovnáním podílů zjistíme, že válec zaujímá přibližně 20% objemu koule.

Povrch koule počítáme podle vzorce $S_K = 4\pi R^2$

25 25.1

$P = \frac{2}{5}$ B)

25.2

$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{9}{25}}$ C)

Pravděpodobnost náhodného jevu A počítáme jako poměr $P = \frac{m}{n}$, kde P je počet výsledků pokusu, při kterých jev A nastane, a n je počet všech možných výsledků pokusu.
I.
Táhneme-li z osudí, ve kterém je 5 koulí, jednu kouli, má tento pokus 5 možných výsledků, jevu A (tažení bílé koule) jsou příznivé 2.

Pravděpodobnost, že první vytažená koule je černá, je $\frac{3}{5}$. Protože vytažené koule se do osudí vracejí, pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je opět černá, je také $\frac{3}{5}$. Pravděpodobnost průniku nezávislých jevů počítáme jako součin pravděpodobností.

25.3

$P = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{13}{25}}$ D)

První dvě vytažené koule budou mít stejnou barvu. Tento případ může nastat dvěma způsoby – obě první koule budou černé, nebo obě první koule budou bílé. Jevy „první dvě vytažené koule budou černé“ a „první dvě vytažené koule budou bílé“ jsou neslučitelné, pravděpodobnost jejich sjednocení dostaneme jako součet jejich pravděpodobností

($\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ je pravděpodobnost toho,

že první dvě vytažené koule budou bílé).

26 26.1 B)
26.2 A)
26.3 C)
26.4 D)

$f_1 : y = \frac{1}{3^x}$

je exponenciální funkce – grafem je exponenciála, základ je roven

$\frac{1}{3} < 1$*, proto* f_1 *klesá ve svém*

definičním oboru, vyhovuje jedině B.

$f_2 : y = \frac{3}{x}$

je nepřímá úměrnost, grafem je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy, vyhovuje jedině A.

$f_3 : y = \frac{x}{3}$

grafem je přímka s kladnou

směrnicí $\frac{1}{3}$*, vyhovuje jedině C.*

$f_4 : y = \frac{1}{x-3}$

je lineární lomená funkce, grafem je hyperbola se středem v bodě [3; 0], vyhovuje jedině D.

ŘEŠENÍ – TEST 3

1 Pro snadnější porovnání čísel a určení, zda do intervalu patří nebo ne, zapíšeme všechna čísla ve stejném tvaru, např. jako čísla desetinná. Poté je zakreslíme na číselnou osu.

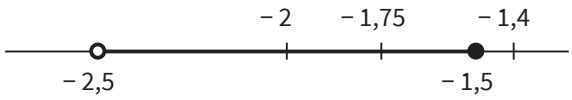
$-\frac{5}{2} = -2,5$

$-\frac{3}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{4} = -1,75$

$-1\frac{1}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{5} = -1,4$



Pro porovnání zadaných čísel bychom také mohli všechna čísla vyjádřit ve zlomcích se společným jmenovatelem.

Do zadaného intervalu tedy nepatří čísla −2, 5 a −1, 4. Určíme jejich součet:
$-2,5 + (-1,4) = \mathbf{-3,9}$

2 Nejprve určíme podmínky. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, proto $x + 4 \neq 0$ a $x - 4 \neq 0$, první podmínka je pro přirozená čísla splněna vždy, druhá pro $x \neq 4$.

$$\frac{4}{x+4} - \frac{20-x^2}{x^2-16} = \frac{1}{x-4} \qquad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$$4 \cdot (x-4) - (20-x^2) = x+4$$

$$4x - 16 - 20 + x^2 = x + 4 \qquad | -(x+4)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8) \cdot (x-5) = 0$$

$\cancel{x = -8}$ Kořen nepatří do množiny přirozených čísel N.

$\mathbf{x = 5}$

případně K = {5}

Protože řešíme rovnici v množině přirozených čísel, podmínku $x \neq 4$ nemusíme uvádět. Kvadratickou rovnici můžeme řešit nejen rozkladem na součinový tvar, ale také pomocí diskriminantu a vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

3 $3^{21} - 11 \cdot 3^{20} + 3^{22} = 3 \cdot 3^{20} - 11 \cdot 3^{20} + 3^2 \cdot 3^{20} = 3^{20} \cdot (3 - 11 + 9) = \mathbf{3^{20}}$

Výraz je opravdu nutné upravit na základě pravidel pro počítání s mocninami. Výpočet pomocí kalkulačky nestačí, protože se v tomto případě hodnotí celý.

4 Aby byla definována odmocnina a logaritmická funkce, musí být splněny podmínky:

$2x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - 4x > 0$

$2x \geq -5 \qquad -4x > -2$

$x \geq -\frac{5}{2} \qquad x < \frac{1}{2}$

$K_1 = \left\langle -\frac{5}{2}; \infty \right) \qquad K_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$

Odmocnina se sudým exponentem je definována jen pro nezáporná reálná čísla. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná reálná čísla. U druhé nerovnosti pozor na násobení záporným číslem.

Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení obou nerovnic (K_1 a K_2).
Definiční obor funkce tedy je:

$\mathbf{D = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)}$

5 Při úpravě lomených výrazů je nutné rozložit čitatele i jmenovatele zlomků na součin. To se provádí vytýkáním nebo využitím vzorců. Poté můžeme krátit. Podmínky určujeme z rozložených jmenovatelů.

$$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2xy+x^2+y^2}{y}:\frac{y+x}{xy}=\frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}\cdot\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y+x}}=\mathbf{x(x+y)}\qquad \mathbf{[x\neq 0, y\neq 0]}$$

6 6.1

Všechny členy zapíšeme pomocí mocnin se základem 3 a upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami:

$$9^{x-2}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

$$3^{2(x-2)}=3^{-3}\cdot 3^x$$
$$3^{2x-4}=3^{x-3}$$
$$2x-4=x-3$$
$$\mathbf{x=1}$$

případně $K=\{1\}$

Pokud při řešení logaritmické rovnice neurčíme podmínky, musíme alespoň zkusit dosadit vypočtený kořen do zadané rovnice a zjistit, zda jsou pro něj logaritmy definovány. U exponenciální rovnice podmínky a zkoušku dělat nemusíme, protože jde o prostou funkci, která je definována pro všechna čísla z R.

6.2

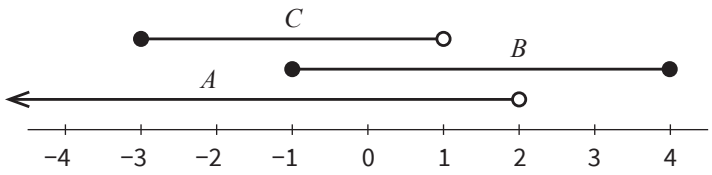
Nejprve určíme podmínky: $x>0$

Členy upravíme pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu:

$$\log_2 x+\log_2 4=4$$
$$\log_2 4x=4$$
$$4x=16$$
$$\mathbf{x=4}$$

případně $K=\{4\}$

7 Intervaly A, B, C zakreslíme na číselnou osu. Okraj intervalu C zvolíme tak, aby se intervaly A, B, C překrývaly na intervalu $\langle -1; 1)$.



$\mathbf{c=1}$

8 Výšky klád tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_1=15$ cm; $a_{17}-a_9=32$ cm

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci:

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

$$a_{17}=a_9+(17-9)\cdot d$$

$$d=\frac{a_{17}-a_9}{8}$$

po dosazení:

$d=4$ cm

Pro výpočet třináctého členu posloupnosti využijeme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$$a_{13}=a_1+(13-1)\cdot d$$

po dosazení:

$a_{13}=15\text{cm}+12\cdot 4\text{ cm}=$ **63 cm**

9 Nejprve určíme dvacátý člen posloupnosti ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d$

po dosazení:

$a_{20} = 15\text{ cm} + 19 \cdot 4\text{ cm} = 91\text{ cm}$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

po dosazení:

$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (15\text{ cm} + 91\text{ cm})$

$\mathbf{s_{15} = 1060\text{ cm}}$

10 Některé výrazy s faktoriály částečně rozepíšeme na součin, vytkneme a pokrátíme:

$$\frac{500! + 499!}{499!} - \frac{501! - 500!}{500!} = \frac{500 \cdot 499! + 499!}{499!} - \frac{501 \cdot 500! + 500!}{500!} =$$

$$= \frac{499!\,(500 + 1)}{499!} - \frac{500!\,(501 - 1)}{500!} = 501 - 500 = \mathbf{1}$$

Při úpravě výrazů s faktoriály rozepisujeme faktoriál většího z čísel na součin. Vypíšeme tolik činitelů, abychom se dostali na úroveň menšího z čísel.

11 11.1
Funkční hodnotu v bodě -2 určíme dosazením čísla -2 do předpisu funkce:

$a_2 = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

11.2
Průsečíky s osou x mají y-ovou souřadnici nulovou. Do předpisu funkce tedy dosadíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnici:

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$D < 0$ Rovnice nemá reálné kořeny. **Průsečíky grafu funkce f s osou x neexistují.**

12 Celý objem nádoby je $V = \frac{3}{2} \cdot 1\text{ l} = 1{,}5\text{ l} = 1500\text{ cm}^3$.

Pro objem válce platí vztah:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

Výška válce je stejná jako průměr jeho podstavy, tedy $v = 2r$:

$V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$

Vyjádříme poloměr r a dosadíme:

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \doteq \mathbf{6{,}2\text{ cm}}$

13 Šest hledaných čísel se pokusíme zapsat do šesti polí tabulky tak, aby byla řada čísel uspořádána vzestupně. Protože má mít medián hodnotu 5,5, musí být ve středních polích tabulky čísla, jejichž průměr je 5,5. Ve třetím a čtvrtém poli by tedy mohla být např. čísla 5 a 6:

		5	6		

Protože má mít modus hodnotu 8, musí být toto číslo zastoupeno alespoň dvakrát. Do posledních dvou polí zapíšeme číslo 8:

		5	6	8	8

Protože má mít aritmetický průměr hodnotu 5, musí být součet všech šesti čísel 6 · 5 = 30. Součet už doplněných čísel je 27, na zbylá dvě pole zbývá součet 3. Doplníme tedy čísla 1 a 2:

1	2	5	6	8	8

Soubor hledaných čísel je tedy např: 1, 2, 5, 6, 8, 8.

Úloha má další dvě řešení:

	2	4	7	8	8
	2	3	8	8	8

14 Vrchol vysílače, pata vysílače a okno tvoří trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti $\gamma = 53°$, sevřeným stranami délky $a = 102$ m a $b = 137$ m. Trojúhelník je podle věty *sus* zadán jednoznačně.

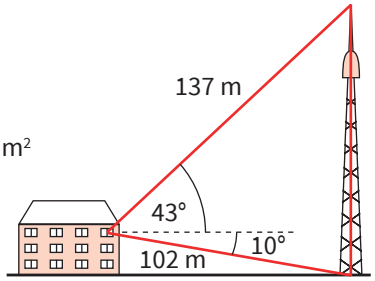
Výšku vysílače v určíme pomocí kosinové věty:

$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

po dosazení:

$v^2 = (1372 + 1022 - 2 \cdot 137 \cdot 102 \cdot \cos 53°)\ \text{m}^2$

v = **111 m**



Kosinovou větu používáme pro řešení trojúhelníků zadaných podle vět sss a sus. Naopak sinovou větu používáme tehdy, je-li trojúhelník zadán podle věty usu nebo Ssu.

Další řešení: Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a k výpočtu použijeme goniometrické funkce ostrého úhlu.

15 15.1

Pravděpodobnost jevu A počítáme jako podíl počtu výsledků m příznivých danému jevu a celkového počtu možných výsledků n.

$m = 6$ (počet dvoukorunových mincí)

$n = 16$ (počet všech mincí)

$P_{(A)} = \frac{6}{16} = 0,375 \sim$ **37,5%**

15.2

$m = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ (počet pětic mincí, ve kterých jsou 3 dvoukorunové 2 pětikorunové mince)

$n = \binom{16}{5} = 4368$ (počet všech pětic mincí)

$P = \frac{60}{4368} \doteq 0,014 \sim$ **1,4%**

Při úvahách o počtu skupin mincí, které můžeme sestavit, je lepší předpokládat, že jsou i mince stejné hodnoty vzájemně rozlišitelné. Představme si například, že je na nich uveden různý rok vyražení, což samozřejmě nemá vliv na výsledek úlohy.

16 Nejprve si vhodně označíme neznámé počty diod. Abychom nemuseli počítat se třemi neznámými, pokusíme se označit počty diod pomocí jediné proměnné x.

červených diod x
zelených diod ..... $1{,}5x$
modrých diod ..... $1{,}5x + 2$
sestavíme rovnici:

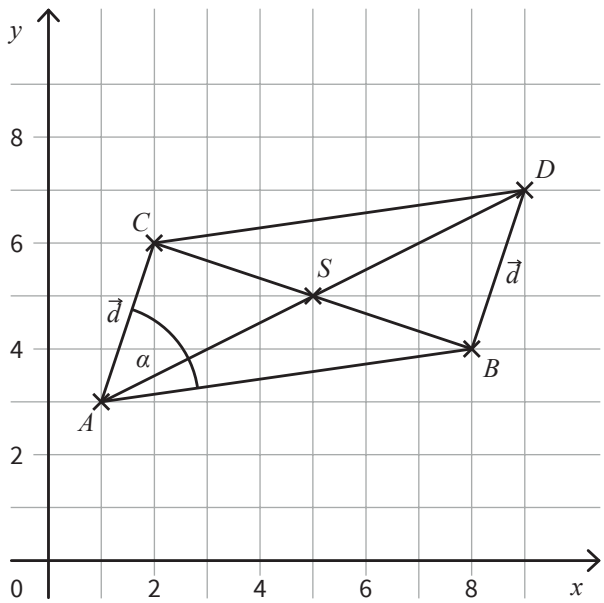
$$x + 1{,}5x + 1{,}5x + 2 = 50$$
$$4x = 48$$
$$x = 12$$

Na stromku je tedy 12 červených, 18 zelených a 20 modrých diod.

A) Červených diod je 14.
B) Zelených a modrých diod je dohromady 36.
C) Modrých diod je 18.
D) Zelených diod je o 6 více než červených.
E) Červených diod je 10.

Počty diod by samozřejmě bylo možné označit třemi neznámými, ale museli bychom pak sestavit soustavu tří rovnic, jejíž řešení je pracnější.

17



17.1
Vrchol C získáme posunutím vrcholu B o vektor $\vec{d}$. Pro jeho souřadnice tedy platí:

$C = B + \vec{d} = [8; 4] + (1; 3) = \mathbf{[9; 7]}$

A N

17.2
Nejprve určíme souřadnice vrcholu D, který je posunutím vrcholu A o vektor $\vec{d}$:

$D = A + \vec{d} = [1; 3] + (1; 3) = [2; 6]$

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{BD}$ určíme ze vztahu:

$\overrightarrow{BD} = (d_1 - b_1; d_2 - b_2) = \mathbf{(-6; 2)}$

A N

17.3
Souřadnice středu rovnoběžníku určíme jako aritmetický průměr souřadnic bodů A, C:

$S\left[\frac{1+9}{2}; \frac{3+7}{2}\right] = \mathbf{[5; 5]}$

A N

17.4
Nejprve určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (7; 1)$

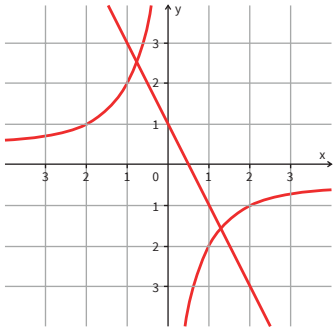
Kosinus hledaného úhlu určíme ze vztahu:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha \doteq 63°26'$

A N

18 Grafem funkce $f: y = -2x + 1$ je strmě klesající přímka protínající osu y v bodě [0; 1]. Tomu odpovídají obrázky D a E. Grafem funkce $f: y = \frac{-2}{x}$ je hyperbola, která má své větve ve II. a IV. kvadrantu. Tomu odpovídají obrázky A, C, a E. **Oba grafy jsou tedy správně sestrojeny na obrázku E.**



19 Délky hran kvádru a, b, c označme pomocí jediné neznámé a, $b = 2a$, $c = 3a$, čímž si zajistíme požadovaný poměr délek hran.
Pro povrch kvádru platí:

$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$

Dosadíme naše délky hran:

$S = 2 \cdot (2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$

Vyjádříme neznámou a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{22}} = \sqrt{\frac{2\,662\ \text{cm}^2}{22}} = 11\ \text{cm}$$

Nejdelší hranou je hrana $b = 3a = 33$ cm.

A) 27 cm
B) 29 cm
C) 30 cm
D) 32 cm
E) jiná délka

20 Z rovnosti vyjádříme rámeček a upravíme:

$\boxed{} = 3\,(a+2)^2 - 2\,(a+3)^2 = 3 \cdot (a^2 + 4a + 4) - 2 \cdot (a^2 + 6a + 9) =$
$= 3a^2 + 12a + 12 - 2a^2 - 12a - 18 = \mathbf{a^2 - 6}$

A) $\boxed{a^2 + 6}$

B) $\boxed{\mathbf{a^2 - 6}}$

C) $\boxed{a + 6}$

D) $\boxed{a - 6}$

E) jiný rámeček

21 Porovnáním zadaného grafu s grafem funkce $y = \cos x$ je zřejmé, že se jedná také o funkci kosinus. Graf má ale dvojnásobnou „výšku“ a je posunut o jedna v kladném směru osy y.

Jeho předpis tedy je:

$\mathbf{y = 2 \cdot \cos x + 1}$

A) $y = 2 \cdot \sin x + 1$
B) $y = \sin x + 2$
C) $y = \sin 2x + 1$
D) $y = \cos 2x + 1$
E) $\mathbf{y = 2 \cdot \cos x + 1}$

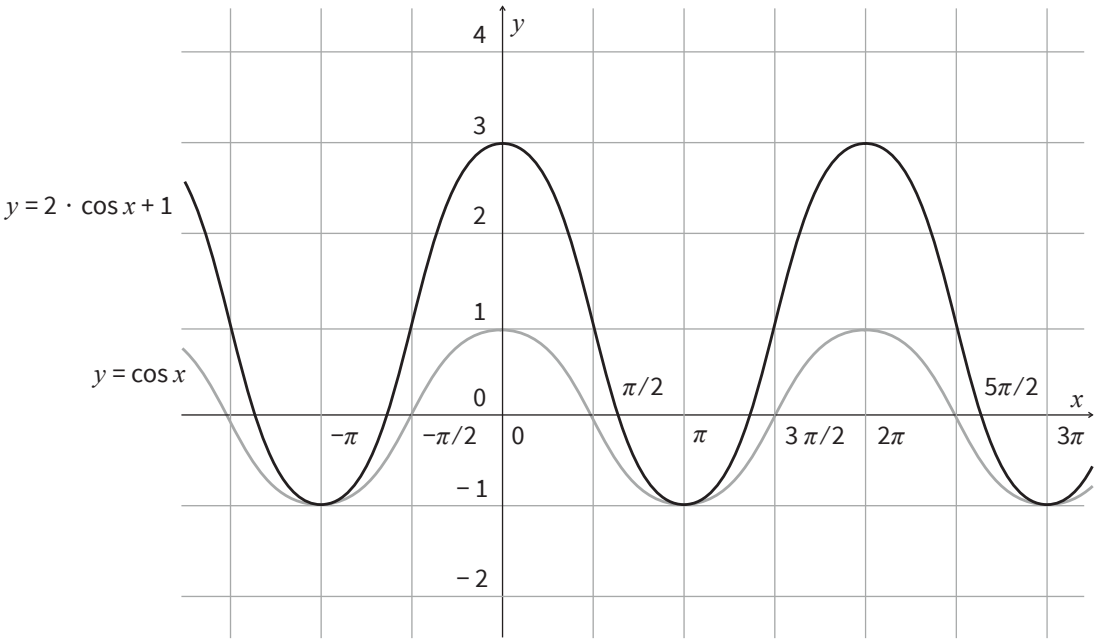
Obecně se dá říci, že graf goniometrické funkce o předpisu $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ ovlivňují jednotlivé koeficienty:

a ... ovlivňuje „výšku“ grafu

b ... ovlivňuje periodu funkce $\left(\text{ta je } \frac{2\pi}{|b|}\right)$

c ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy x

d ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy y



22 Nejprve určíme obsah půlkruhu:

$S_1 = \frac{\pi c^2}{8} \doteq 353{,}43\ \text{m}^2$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (podle Thaletovy věty), k určení jeho obsahu tedy stačí znát délky jeho odvěsen:

$a = c \cdot \cos\beta \doteq 24{,}57$ m
$b = c \cdot \sin\beta \doteq 17{,}21$ m

Obsah trojúhelníku ABC je tedy:

$S_2 = \frac{a \cdot b}{2} \doteq 211{,}42\ \text{m}^2$

Poměr obsahů je:

$\frac{S_1}{S_2} \doteq 0{,}60 \sim 60\%$

Plocha záhonů tvoří doplněk do 100 %, což je 40 %.

A) 35%
B) 40%
C) 42%
D) 45%
E) 48%

23 Normálovým vektorem hledané přímky p je např. vektor $\overrightarrow{BA} = (8; -4)$.
Pro sestavení obecné rovnice přímky p použijeme k- násobek vektoru AB
$\vec{n}_p = (2; -1)$.

Rovnice tedy bude mít tvar:
$p: 2x - y + c = 0$

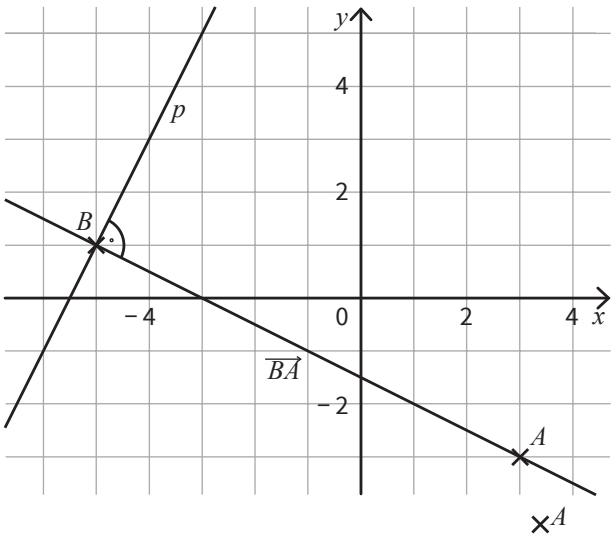
Neznámý koeficient c dopočítáme dosazením souřadnic bodu B, který na přímce p leží:
$2(-5) - 1 + c = 0$

$c = 0$

Přímka p má tedy rovnici:
$\mathbf{p: 2x - y + 11 = 0}$

Libovolný nenulový násobek této rovnice je opět rovnicí stejné přímky.
Takže pokud bychom použili přímo vektor $\overrightarrow{BA}$, dostali bychom rovnici p: $8x + 4y + 44 = 0$, která je také správným řešením.

A) $p: x + 2y + 3 = 0$
B) $p: x - 2y + 7 = 0$
C) $p: 2x - y + 7 = 0$
D) $p: 2x - y + 11 = 0$
E) $p: x + 2y + 11 = 0$



24 K_{10} = 3 500 000 Kč (dlužná částka po deseti letech)
p = 0,048 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 10 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Pro výši dlužné částky po n letech platí vztah:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Vyjádříme počáteční výši úvěru:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}$$

po dosazení:

$$K_0 = \frac{3\,500\,000 \text{ Kč}}{(1 + 0,048)^{10}} \doteq 2\,190\,000 \text{ Kč}$$

A) 2 190 000 Kč
B) 2 240 000 Kč
C) 2 280 000 Kč
D) 2 390 000 Kč
E) jinou částku

25 Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic koncových bodů úsečky.
Pro výpočet vzdálenosti bodů A, B používáme vzorec: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

25.1
$a = |BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{68} = \mathbf{2\sqrt{17}}$ F)

25.2
Nejprve určíme střed strany a:

$$S_a\left[\frac{4-4}{2}; \frac{5+3}{2}\right] = [0; 4]$$

$t_a = |AS_a| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \mathbf{\sqrt{13}}$ A)

25.3
$c = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = 20 = \mathbf{2\sqrt{5}}$ B)

25.4

$$S_c\left[\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right] = [3; 3]$$

$t_c = |CS_c| = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49+0} = \mathbf{7}$ D)

Při určování velikosti úsečky nezáleží na pořadí, ve kterém odečítáme souřadnice bodů. Ale při určování souřadnic vektoru na tomto pořadí záleží. Od souřadnic koncového bodu musíme odečítat souřadnice počátečního bodu.

26 Pravidelný desetiúhelník můžeme rozdělit na 10 shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Vnitřní úhel proti základně má tedy velikost $\frac{360°}{10} = 36°$.

Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180°, mají zbylé vnitřní úhly velikost 72°.

Vyznačené úhly pak mají velikost:

26.1 $\alpha = 3 \cdot 36° = \mathbf{108°}$ C)
26.2 $\beta = 2 \cdot 72° = \mathbf{144°}$ D)
26.3 $\gamma = \mathbf{72°}$ E)

U pravidelných n-úhelníků bývá také často za úkol výpočet poloměru kružnice vepsané a opsané. V těchto typech příkladů se také vyplatí rozdělit n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků a dále pracovat s jedním z nich.

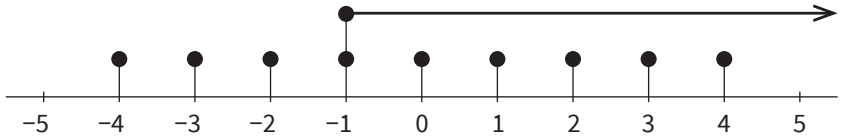
ŘEŠENÍ – TEST 4

1 Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, tj.:

$A = \{x \in Z\}; |x| < 5 = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu –1, tj.:

$B = \{x \in R\}; x \geq -1 = \langle -1; \infty)$



Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, obsahuje pouze 9 čísel.
Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu –1, obsahuje tedy nekonečně mnoho čísel v intervalu $\langle 1; \infty)$.
Špatně by bylo, kdybychom zapsali výsledek jako interval, tj. $\langle 1; 4 \rangle$.

Průnik množiny A a B bude obsahovat čísla, která mají obě množiny společné, tj. čísla, která patří jak do množiny A, tak do množiny B.
Průnik těchto dvou množin obsahuje pouze 6 čísel:

$\boldsymbol{A \cap B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}}$

2 Litry si převedeme na cm³:

829 litrů = 829 dm³ = 829 000 cm³

Číslo a, které splňuje podmínku

$1 \leq a < 10$ je 8,29.

Abychom dostali číslo 829 000, musíme 8,29 vynásobit číslem 100 000, tj. číslem 10^5, proto je 829 000 cm³ = **$8{,}29 \cdot 10^5$ cm³**.

3 $\frac{x^2-5}{x-5} - 1 = \frac{x^2-5-(x-5)}{x-5} = \frac{x^2-5-x+5}{x-5} = \boldsymbol{\frac{x^2-x}{x-5}}$

Žáci zde často dělají chybu, že ve zlomku krátí x^2 v čitateli s x ve jmenovateli a –5 v čitateli i jmenovateli. Případně by se mohlo stát, že žák v euforii, že je v čitateli jasný vzorec, rozloží čitatel chybně na součin $(x-5)(x+5)$ a poté krátí čitatel a jmenovatel, k čemuž tato úloha opravdu svádí.
V zadání není uvedeno, že máme určit podmínky. Proto je zde neurčujme! V případě, že je určíme a budou správné (tj. $x \neq 5$), nic se neděje.
V případě, že je určíme chybně, pravděpodobně za ně bude odečten bod, tj. i když máme správně výsledek, získáme za úlohu jen 1 bod, protože u široce otevřených úloh se hodnotí vše, co žák do záznamového archu napíše.
Pozor: u rovnice s neznámou ve jmenovateli je naopak důležité podmínky určit, i když to v zadání není napsané. Můžeme tím zjistit, že výsledek, který nám vyšel, není v souladu s podmínkami a řešením rovnice tedy není.

4 Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Jestliže druhý den přišlo na výstavu o 50 osob více, bylo tam tedy $(k + 50)$ osob

a ty zaplatily $\frac{m}{k}(k+50)$ korun.

Výraz se dá upravit a roznásobit do tvaru:

$\boldsymbol{m + 50\frac{m}{k}}$

Jiný postup řešení:
Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Pokladní tedy druhý večer vybrala opět m korun,

ale navíc ještě od 50 osob $50\frac{m}{k}$ korun.

Tedy celkem za druhý večer vybrala $(m + 50\frac{m}{k})$ korun.

5 $\frac{2x^2 - 9x + 9}{2x - 3} = 1$

Podmínky: jmenovatel se nesmí rovnat 0, tj. $2x - 3 \neq 0$, z toho plyne, že $x \neq \frac{3}{2}$.

Dále budeme řešit samotnou rovnici. Celou rovnici vynásobíme výrazem $2x - 3$:

$2x^2 - 9x + 9 = 2x - 3$

Převedeme si všechny členy na levou stranu:

$2x^2 - 9x + 9 - 2x + 3 = 0$

Získáme kvadratickou rovnici:

$2x^2 - 11x + 12 = 0$

Koeficienty této rovnice jsou: $a = 2$, $b = -11$, $c = 12$

Pro diskriminant kvadratické rovnice platí vztah: $D = b^2 - 4ac$. Dosadíme koeficienty a získáme

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Po dosazení získáme:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}$

Pro jednotlivé kořeny platí:

$x_1 = \frac{11 + 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$x_2 = \frac{11 - 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Porovnáme výsledky s podmínkami a zjistíme, že kořen x_2 nesplňuje podmínky řešitelnosti, proto je řešením zadané rovnice pouze číslo $x = 4$.

***K* = {4}**

6 6.1

Průsečíky s osou x jsou ty body grafu funkce f, které mají nulovou y-ovou souřadnici, proto:

$y = x^2 + 3x - 40 = 0$

Budeme řešit kvadratickou rovnici. Vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-40) = 169$.

Dosadíme do vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 13}{2}$

$x_1 = 5$, $x_2 = -8$

P_x = [5; 0], P'_x = [−8; 0]

6.2

Nejdříve vypočítáme vrchol paraboly. Pro x-ovou souřadnici vrcholu platí vzorec:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$

Souřadnici y_v dopočítáme dosazením za x do předpisu funkce. $\left(\text{Nebo použijeme vzorec: } y_v = \frac{b^2}{2a}\right)$.

$$y_v = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 40 = -\frac{169}{4}$$

Funkce f má koeficient $a = 1 > 0$, tj. parabola bude otevřená směrem nahoru.

Obor hodnot funkce tedy bude:

$$H_f = \left\langle -\frac{169}{4}; \infty \right)$$

7 $5 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+1} + 108 = 0$

$$5 \cdot \frac{3^x}{3} - 3 \cdot 3^x = -108$$

$$5 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x = -324$$

$$-4 \cdot 3^x = -324$$

$$3^x = 81$$

$$x = 4$$

8 Katalogová cena košile ... x Kč

Po zvýšení o čtvrtinu hodnoty ... $\left(x + \frac{1}{4}x\right)$ Kč

Po snížení o 360 Kč ... $\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right)$ Kč

Cena 8 košilí ve výprodeji stojí stejně jako 1 košile za katalogovou cenu, tj.

$$8\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right) = x$$

$$8x + 2x - 2880 = x$$

$$9x = 2880$$

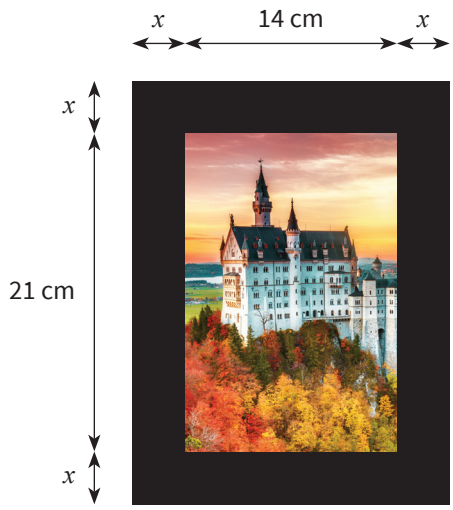
$$x = 320$$

Katalogová cena jedné košile byla **320 Kč**.

9 Fotografie má tvar obdélníku a její plocha je rovna obsahu obdélníku, tj. 21 cm · 14 cm = 294 cm².

Plocha obrazu včetně rámu je dvojnásobná, tj. $S_{obrazu} = 2 \cdot 294\ \text{cm}^2 = 588\ \text{cm}^2$.

Označíme si šířku rámu x, pak délky stran obrazu jsou $(21 + 2x)$ cm a $(14 + 2x)$ cm :



$S_{obrazu} = (21 + 2x)(14 + 2x) = 588$ (kde x je šířka rámu)

Po úpravě:

$2x^2 + 35x - 147 = 0$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = 2401$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-35 \pm 49}{2}$

$x_1 = 3{,}5$ a $x_2 = -21$

Zadání úlohy vyhovuje pouze kladný kořen (x je šířka rámu), tj. $x = 3{,}5$ cm.

Rozměry obrazu: 14cm + 2 · 3,5 cm = **21 cm** a 21 cm + 2 · 3,5 cm = **28 cm**.

10 Hledáme čtveřici čísel, z nichž každé je jiné a záleží na pořadí, jde tedy o variace bez opakování.

Vybíráme celkem z deseti čísel (0, 1, 2 až 9) a vybíráme čtyři čísla, tj.
zápis variace 4. třídy z 10 prvků

$$V = \frac{10}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

11 11.1
Celkový počet objednávek je 141, tj. je to liché číslo, zajímá nás tedy údaj, který je u 71. objednávky, a to je **srpen**.

11.2
Modus je měsíc, ve kterém bylo učiněno nejvíce objednávek, tj. **červen**.

12 $\left(\frac{3}{n^2 n^4}\right)^{-1} - \left(\frac{n^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{n^6}\right)^{-1} - \frac{n^6}{27} = \frac{n^6}{3} - \frac{n^6}{27} = \frac{9n^6 - n^6}{27} = \mathbf{\frac{8n^6}{27}}$ nebo $\mathbf{\frac{8}{27}n^6}$

13 Na začátku stál robot 390 000 Kč,
po prvním roce stál $p \cdot 390\,000$ Kč,
po druhém roce $p^2 \cdot 390\,000$ Kč,
po třetím roce $p^3 \cdot 390\,000$ Kč.

Tj. $p^3 \cdot 390\,000$ Kč = 24 960 Kč,

vypočítáme p a vyjde

$p = 0{,}4 = 40$ %. Odepisujeme tedy 100 % – 40 % = **60 %**.

14 První dvě vytažené čokolády mají být mléčné:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je 3,

druhou čokoládu vybíráme už jen ze 6 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je nyní jen 2,

tj. $P = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

15 První vytažená čokoláda má být hořká a druhá mléčná:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád a počet příznivých jevů je 4,

druhou vybíráme už jen ze 6 čokolád a počet příznivých jevů (mléčných čokolád) je 3,

tj. $P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

16 16.1 A ☐ N ■

Upravíme výraz $A = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2$ podle vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\left(3x - \frac{y}{2}\right)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x\,\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \mathbf{\neq 9x^2 - 3xy + 4y^2}$

16.2 A ■ N ☐

Upravíme výraz $A = a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2$; vytkneme z prvních dvou členů a^2 a z dalších dvou členů b^2,

tj. $a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2 = a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9)$.

A dále vytkneme závorku $(a - 9)$,

tj. $a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9) = (a^2 - b^2)\,(a - 9)$

První závorka je vzorec, rozložíme podle něj závorku a získáme:

$(a^2 - b^2)\,(a - 9) \mathbf{= (a - b)\,(a + b)\,(a - 9)}$

Nebo můžeme upravovat výraz B – roznásobit postupně všechny závorky – a dojdeme tím k výrazu A.

16.3 A N

Upravíme výraz A, vydělíme čitatele i jmenovatele číslem 4:

$$\frac{4\,(x-2)}{x+8} = \frac{x-2}{\frac{x+8}{4}}$$

Ve jmenovateli rozdělíme zlomek na zlomky dva:

$$\frac{x-2}{\frac{x+8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+\frac{8}{4}} = \mathbf{\frac{x-2}{\frac{x}{4}+2}}$$

Nebo můžeme upravovat výraz B a dojdeme tím k výrazu A.

16.4 A N

Upravíme výraz $A = (2-9k)^2 - 16$ podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$A = (2-9k)^2 - 16 = (2-9k-4)(2-k+4)$.

Závorky upravíme a získáme výraz:

$(-2-9k)(6-9k) \mathbf{\neq (2-9k)(6-9k)}$

17 Čitatel zlomku na levé straně nerovnice je záporný (je roven –5).

Má-li být celý zlomek menší nebo roven nule, pak musí být jmenovatel zlomku kladný.

(POZOR: jmenovatel se nesmí rovnat nule!) Musí tedy platit:

$2x - 9 > 0$

$2x > 9$

$x > \frac{9}{2}$

tj. $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ C)

18 Jablek ..... 16 ks, nezralých jablek ..... 16 : 4 = 4 ks, vyhodíme 2 ks ..... zůstala 2 nezralá jablka

Banánů ..... 28 ks, nezralých banánů ..... 28 : 4 = 7 ks, vyhodíme 2 ks ..... zůstalo 5 ks nezralých banánů,

Celkem ..... 44 ks, nezralé ovoce celkem ..... 11 ks, vyhodíme 4 ks ..... zůstalo 7 ks nezralého ovoce.

Na začátku: 100 % ..... 44 ks ovoce

x % ..... 11 ks nezralého ovoce

$x = \frac{11}{44} \cdot 100\,\% = 25\,\%$

Nebo také: jestliže je nezralá čtvrtina jablek a čtvrtina banánů, pak je nezralá čtvrtina ovoce, tj. 25 %.

Po vyhození: 100 % ..... 40 ks ovoce

x % ..... 7 ks nezralého ovoce

$x = \frac{7}{40} \cdot 100\ \% = 17,5\ \%$

Závěr: 25 % - 17, 5 % = 7, 5 %.

Jestliže vyhodíme 2 nezralá jablka a 2 nezralé banány, klesne v bedně počet nezralého ovoce o 7, 5 %. B)

19 $R = k \cdot \frac{d}{S}$

Pravou i levou stranu rovnice vynásobíme veličinou S, potom:

$R \cdot S = k \cdot d$

Pravou i levou stranu rovnice vydělíme veličinou k, potom:

$\frac{RS}{k} = d$

$d = \frac{RS}{k}$ D)

20 Poměr stran obdélníku je 4:3, strana $a = 4x$ a strana $b = 3x$, pro obvod platí $o = 28 = 2(a + b)$, tj.

$28 = 2(4x + 3x)$, a odtud vypočítáme, že $x = 2$ cm, tedy $a = 4 \cdot 2$ cm = 8 cm, $b = 3 \cdot 2$ cm = 6 cm.

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven obsahu dvou trojúhelníků CDS.

Obsah trojúhelníku CDS: $S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12\ \text{cm}^2$

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku CDS, tj. $S = 2 \cdot 12 = 24\ \text{cm}^2$.

24 cm² A)

21 Papír má tvar obdélníku, obsah tohoto obdélníku, tedy 1 ks papíru je: $S = 0,21 \cdot 0,297 = 0,06237\ \text{m}^2$.

Obsah 500 ks papírů; (tj. jednoho balení) je: $S = 500 \cdot 0,06237\ \text{m}^2 = 31,185\ \text{m}^2$.

1 m² ..... 80 g

31,185 m² ..... x g

$x = 31,185 \cdot 80 = 2494,8$ g = 2,4948 kg ≐ **2,5 kg** D)

22 Podle tvaru grafu jde o exponenciální funkci. **E) $y = 3^x - 1$**

Grafem A) by byla přímka,
grafem B) parabola,
grafem C) hyperbola, logaritmická funkce
D) graf logaritmické funkce, není ale definován pro x menší nebo rovno 0
E) exponenciála (rostoucí), posunutá o 1 dolů

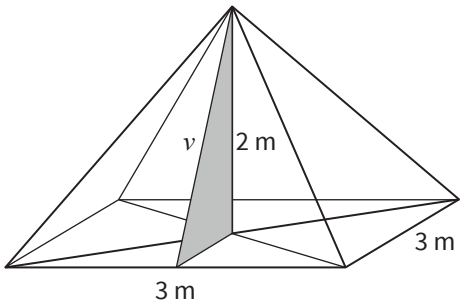
Případně můžeme i zkoušet za x a y dosazovat hodnoty a ověřovat, jestli bod leží na grafu funkce, např. u funkce A) zkusíme za x dosadit −1, v tom případě $y = -2$, ale bod [−1; −2] neleží na grafu funkce f apod.

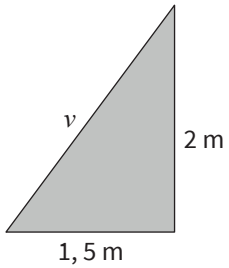
23 Nakreslíme si jehlan (střechu) a popíšeme prvky, které známe.

Střecha se skládá ze čtyř shodných trojúhelníků se základnou 3 m.

Označíme si výšku v trojúhelníku, ze kterého budeme výšku počítat.

Trojúhelník je pravoúhlý, z Pythagorovy věty získáme v: $v^2 = 1{,}5^2 + 2^2$, tj. $v = 2{,}5$ m.

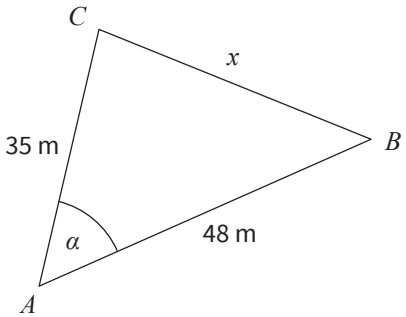




Nyní již můžeme vypočítat plochu střechy: $S = 4 \cdot S_{troj.} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5}{2} = 15\ \text{m}^2$. D)

24 V trojúhelníku známe dvě strany a úhel mezi nimi, úkolem je spočítat stranu proti úhlu.

Délku strany CB tedy spočítáme pomocí kosinové věty.



$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$x^2 = 35^2 + 48^2 - 2 \cdot 35 \cdot 48 \cdot \cos 53°25' \doteq 1526{,}47$

$x \doteq 39$ m B)

25 Nejprve určíme souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC: $A = [-2; -1]$, $B = [4; -3]$, $C = [1; 3]$.

25.1

Souřadnice středu S strany AB vypočítáme ze vztahu $S = \frac{A + B}{2}$, tj. $S = \left[\frac{-2+4}{2}; \frac{-1-3}{2}\right] = [1; -2]$.

Nyní vypočítáme souřadnice směrového vektoru přímky $\overleftrightarrow{SC}$,

$\vec{s} = \overrightarrow{SC} = (1 - 1; 3 - (-2)) = (0; 5)$.

Vektor $(0; 5)$ má z nabízených souřadnic stejný směr jako vektor $(0; 1)$ E)

25.2
Směrový vektor přímky BC je $\overrightarrow{BC} = (1 - 4; 3 - (-3)) = (-3; 6) \sim (-1; 2)$.

Normálový vektor přímky BC je tedy $\vec{n} = (2; 1)$ ... přehodíme x-ovou a y-ovou souřadnici a u jedné změníme znaménko. B)

25.3
Je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AC, mají stejné směrové vektory bez ohledu na to, kterým bodem přímka p prochází. Směrový vektor přímky p je tedy:

$\vec{s} = \overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$ F)

25.4
Směrový vektor osy x má souřadnice (1;0).

Jestliže to nevíme, můžeme si na ose x zvolit libovolné dva body, např. $O = [0; 0]$ a $D = [1; 0]$, a určit směrový vektor osy x jako směrový vektor přímky OD,

$\vec{s} = \overrightarrow{OD} = (1 - 0); 0 - 0) = (1; 0)$.

Z nabízených vektorů má stejný směr vektor (5; 0). C)

26 26.1
Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože rozdíl počtu cestujících každých dvou sousedních vagonů je stejný (diference d). $a_{20} = 97$, $a_{30} = 147$, $a_1 = ?$

$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

$d = \frac{a_r - a_s}{r - s} = \frac{147 - 97}{30 - 20} = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d = 97 - (20 - 1) \cdot 5 = \mathbf{2}$ A)

26.2
$s_{10} = ?$

$s_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$

Vypočítáme desátý člen:

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 27 + 9 \cdot 5 = 47$

$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 47) = \mathbf{245}$ E)

26.3
$a_{31} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot d = 2 + 30 \cdot 5 = \mathbf{152}$ D)

nebo $a_{31} = a_{30} + d = 147 + 5 = 152$

ŘEŠENÍ – TEST 5

1 V pátek a v sobotu ušli $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{12}$ z celé trasy. Na neděli zbývá tedy $\frac{5}{12}$ z 11 km, tj. $\frac{55}{12}$ km ≐ 4 600 m.

2 Podle definice logaritmu $r-5=3^p$, tedy $r=3^p+5$

3 $\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{12}}$

4 $\left.\begin{matrix}A[-3;0]\\C[2;0]\end{matrix}\right\}\rightarrow y=a(x+3)(x-2)$

$y=a(x^2+x-6)$

$B\,[0;3]\in f\rightarrow 3=-6a\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$f: y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$

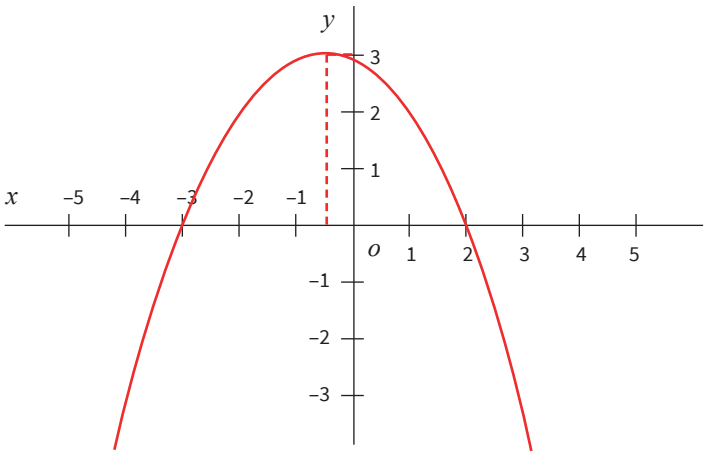
$V\,[m;\,n]=-\frac{b}{2a},\ n=f\,(m)$

$$m=-\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$$

$$n=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+3=\frac{25}{8}$$

$$V\left[-\frac{1}{2};\ \frac{25}{8}\right]$$

Největší hodnota funkce f je rovna $\frac{25}{8}$.



Využijeme znalost průsečíků grafu funkce f se souřadnicovou osou x a rozložíme kvadratický trojčlen, chybějící koeficient a získáme ze třetího zadaného bodu.
Grafem kvadratické funkce je parabola, pro a<0 „otevřená dolů“. Pro určení maximální hodnoty musíme najít souřadnice jejího vrcholu.

5 $\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\leq\frac{(3x+1)^2}{4}\quad/\cdot 4$

K řešení nerovnice použijeme ekvivalentní úpravy nerovnic.

$2(x-1)^2+8(x+1)^2\leq(3x+1)^2$

$2(x^2-2x+1)+8(x^2+2x+1)\leq 9x^2+6x+1$

$2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 \leq 9x^2 + 6x + 1$

$x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$(x + 3)^2 \leq 0$

$x = -3$

$K = \{-3\}$

Kvadratický člen $(x + 3)^2$ nemůže nabývat záporné hodnoty. Proto řešíme „jen“ rovnici $(x + 3)^2 = 0$, která má jediné řešení.

6 $3(2x - y)(x + 5y) + x(x - 27y) = 3(2x^2 - xy + 10xy - 5y^2) + x^2 - 27xy =$

$= 3(2x^2 + 9xy - 5y^2) + x^2 - 27xy = 6x^2 + 27xy - 15y^2 + x^2 - 27xy =$

$= 7x^2 - 15y^2$

7 $a_1 = 2, a_5 = 32$

$s_5 = (a_1 + a_5) \cdot \frac{5}{2} = (2 + 32) \cdot \frac{5}{2} = 85$

8 $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm

$\Delta MNP \sim \Delta ABC \rightarrow m = ka, n = kb, p = kc$

$^{o}\Delta MNP = m + n + p = 84$ cm

$13k + 14k + 15k = 84$

$42k = 84$

$k = 2$ a nejdelší strana je $p = 30$ cm

Nejdelší strana má délku 30 cm.

9 $4(x + 2)^2 = 5$

$(x + 2)^2 = \frac{5}{4}$

$|x + 2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x + 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{2}$

10 $0{,}2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0 \; /+200$

$0{,}2 \cdot 10^{4x-7} = 200 \; /:0{,}2$

$10^{4x-7} = 1\,000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

11 $\cos\left(\frac{8\pi x}{6}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\pi x}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $\frac{8\pi x}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11}{8} + \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

Pro $k = -1 x_1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{8}, x_2 = \frac{11}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8} > -\frac{11}{8}$

12 $S = S_P + S_{Pl} = a^2 + 4S_{\Delta BCV}$

$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

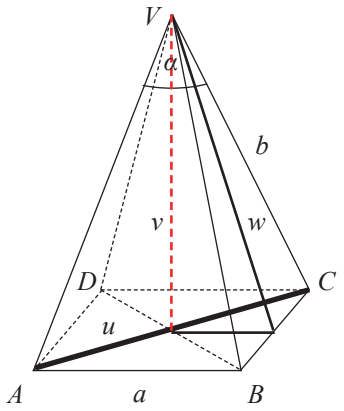
$S_P = a^2 = \frac{u^2}{2} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{2}\ \text{cm}^2 = 16\ \text{cm}^2$

$a = 4$ cm

$\alpha = 60°$, proto trojúhelník ACV je rovnostranný, tedy $b = u$

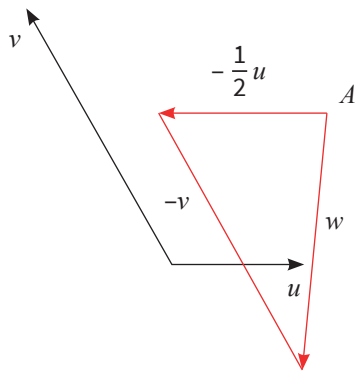
$S_{\Delta BCV} = \frac{aw}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{32 - 4}}{2}\ \text{cm}^2 = \frac{4\sqrt{28}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{7}\ \text{cm}^2$

$S = (16 + 4 \cdot 4\sqrt{7})\ \text{cm}^2 = (16 + 16\sqrt{7})\ \text{cm}^2$ ($\doteq 58{,}3\ \text{cm}^2$)

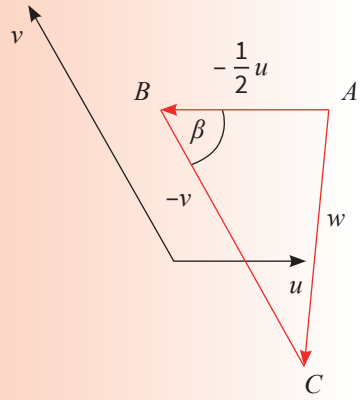


Povrch pravidelného jehlanu tvoří čtvercová podstava a plášť ze čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků.

13 13.1.



Pro výpočet velikosti nalezeného vektoru použijeme kosínovou větu pro trojúhelník ABC.



13.2.

$\beta = 180° - 120° = 60°$

$|w|^2 = \left|-\frac{1}{2}u\right|^2 + |-v|^2 - 2\left|-\frac{1}{2}u\right| \cdot |-v| \cos\beta =$

$= \frac{25}{4} + 16 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \cos 60° = \frac{25}{4} + 16 - 10 = \frac{49}{4}$

$|w| = \frac{7}{2} = 3{,}5$

14 $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 - \frac{27}{64} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{16} = \frac{5}{4}$

Využijeme rovnost

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 +$

$+ \sin\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2 + \sin$

$\alpha\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$a\ \cos^2\alpha = \frac{7}{16}$, proto

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$2 + \sin\alpha = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

15 $V(x) + V(-18 - x) = \frac{x(-18 - x)}{x + 9} + \frac{(-18 - x)(-18 + 18 + x)}{-18 - x + 9} = \frac{x(-18 - x)}{x + 9} + \frac{(-18 - x) \cdot x}{-x - 9} = 0$

$x \neq 9$

$V(-18 - x) = \frac{(-18 - x) \cdot (-18 - (-18 - x)}{(-18 - x) + 9} = \frac{(-18 - x) \cdot x}{-x - 9}$

16

	A	N
16.1	☐	■
16.2	■	☐
16.3	☐	■
16.4	■	☐

Průměrná výška ve skupině:

$\bar{h} = \frac{168 + 172 + 179 + 180 + 190}{5}$ cm = 177,8 cm

$\bar{h}^1 = \frac{168 + 190}{2}$ cm = 174 cm

17 Pro $q = 1{,}5$ C)

Pro $q = 0{,}25$ platí: $a_2 = \frac{a_1}{4}, a_3 = \frac{a_1}{16}$, není splněna trojúhelníková nerovnost. ($a_2 + a_3 < a_1$). Analogicky pro $q = 0{,}5$ a pro $q = 2$.

Pro $q = 1{,}5$ je $a_2 = \frac{3}{2} a_1$, $a_3 = \frac{9}{4} a_1$,

$a_1 + a_2 = \frac{5}{2} a_1 > a_3 = \frac{9}{4} a_1$,

$a_1 + a_3 = \frac{13}{4} a_1 > a_2 = \frac{3}{2} a_1$,

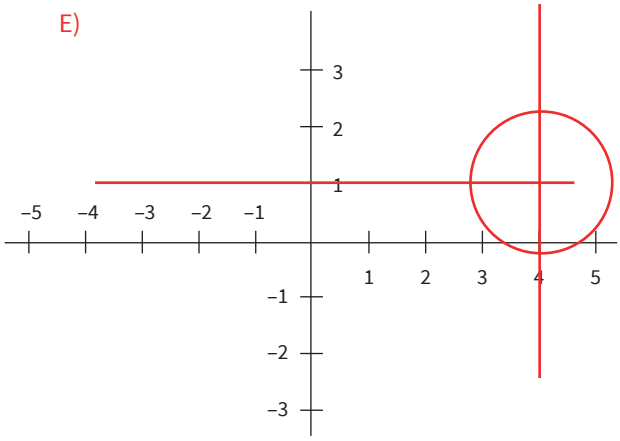
$a_2 + a_3 = \frac{15}{4} a_1 > a_1$

18 $\frac{1}{6}$ B)

V dané množině je 5 druhých mocnin: 1; 4; 9; 16; 25.

$P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

19 $p \in (13; 16)$ E)



Vzdálenost středu S od osy x je 1. Tzn. že při $r = 1$ by osa byla tečnou a při $r > 1$ bude sečnou, tj. budou existovat dva průsečíky.
Podobně využijeme vzdálenost středu S od osy y, ta je 4, tj. při $r = 4$ bude tečnou s jediným průsečíkem. Žádný průsečík nastane pro $r < 4$. Řešíme tedy soustavu nerovnic
$17 - p < 4 \wedge 17 - p > 1 \rightarrow p > 13 \wedge$
$\wedge\, p < 16$
$p \in (13; 16)$

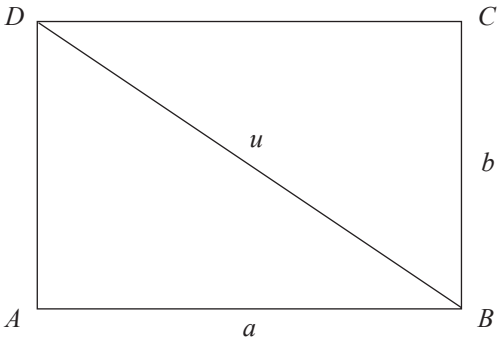
20 $5x - 4y - 17 = 0$ D)

$v \perp a \rightarrow a: 5x - 4y + c = 0$

$S \in a \rightarrow 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + c = 0 \rightarrow c = -17$

$a: 5x - 4y - 17 = 0$

21 16,86 cm^2 A)



$S = a \cdot b$

$u^2 = a^2 + b^2$

$u^2 = (u - 3)^2 + 5{,}3^2$

$0 = -6u + 9 + 28{,}09$

$6u = 37{,}09$

$u \doteq 6{,}182$ cm, $a \doteq 3{,}182$ cm

$S = 5{,}3 \cdot 3{,}182$ cm$^2 \doteq 16{,}86$ cm^2

22 20,51 % D)

Běžná cena oběda: (85 + 199) Kč = 284 Kč

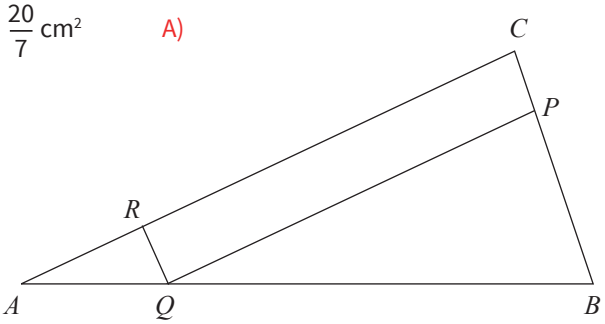
Cena oběda v akci:

$0{,}9 \cdot 85 + 0{,}75 \cdot 199$ Kč = 225,75 Kč

$\frac{225{,}75}{284} \doteq 0{,}794\,9$

100 % – 79,498 % = 20,51 %

23 $\frac{20}{7}$ cm² A)



$\Delta ABC \sim \Delta AQR$ s koeficientem podobnosti $\frac{2}{7}$, protože $|AQ| = \frac{2}{7}|AB|$

$S_{\Delta AQR} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 S_{\Delta ABC} = \frac{4}{49} \cdot 35\ \text{cm}^2 = \frac{20}{7}\ \text{cm}^2$

24 0 A)

$$\frac{x^2 - 9}{(3x^2 + 9x)\,(x - 3)^2} = 0$$

$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$

Zlomek je roven nule jedině tehdy, když je čitatel roven nule: $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, žádné z těchto čísel nevyhovuje podmínkám.

K = $\emptyset$

25 25.1 A)

$o = 2\pi r \rightarrow r = \frac{o}{2\pi} \rightarrow r = 1,\ V = \pi r^2 \cdot v = 2\pi \cdot 1\ \text{cm}^3 \doteq 6{,}28\ \text{cm}^3$

25.2 C)

$S = 4\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$, tedy $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{20}{4\pi}}\right)^3 \text{cm}^3 \doteq 8{,}4\ \text{cm}^3$

25.3 E)

$V\ \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\ \text{cm}^3 \doteq 9{,}2\ \text{cm}^3$

25.4 D)

$V = S_p \cdot v = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot b = \frac{1{,}5^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{4}\ \text{cm}^3 \doteq 8{,}7\ \text{cm}^3$

26 26.1 D)

Poslední dvojčíslí musí být dělitelné 4: 12; 32; 52, ke každému dvojčíslí lze připojit libovolnou dvojčlennou variaci ze zbylých tří číslic

$x = 3 \cdot V_2(3) = 3 \cdot 6 = 18$

26.2 C)

Na pozici jednotek nutné umístit 5, počet obsazení zbylých pozic určíme s užitím kombinatorického pravidla součinu $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ale záměnou stejných dvojek nové číslo nedostaneme, proto 24 je nutno dělit dvěma. $24 \cdot 2 = 12$

26.3 A)

Číslo musí být dělitelné dvěma i třemi.

Pro dělitelnost třemi použijeme ciferný součet. Součet čtyř čísel z kartiček bude dělitelný třemi jen výběrem číslic 2; 2; 3; 5. Z vybraných číslic tvoříme uspořádané skupiny, na pozici jednotek musí být dvojka. Jejich počet určíme užitím pravidla součinu: $x = 3 \cdot 2 = 6$

ŘEŠENÍ

(VERZE 2018–2022)

ŘEŠENÍ – ČÍSELNÉ OBORY

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 16,4

2 $-\frac{9}{4}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{2}$

3 9

4 $\frac{37}{4}$

5 $b : c = 8 : 9$

6 620 kg

7 Přibližně o 53,3 %.

8

9 24

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $\frac{20\cdot 72\cdot 225}{25\cdot 36}=\frac{2\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{5\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{2^5\cdot 3^4\cdot 5^3}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$

Důraz klademe na krácení, poté rozložíme na součin mocnin prvočísel a využijeme věty o počítání s mocninami.

2 $n(10, 12, 15) = 60$
Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

60 : 10 = 6
60 : 12 = 5
60 : 15 = 4

Do krychle se vejde 6 · 5 · 4 = 120 krabiček.

Představíme si kvádry, které jsou seskládány do krychle. Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

3 Součin čísel 12 a 25 je 2 · 2 · 3 · 5 · 5.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo n je dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo n je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo n není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo n je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo n je nejmenší společný násobek čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek. Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

4

		A	N
4.1	2 je prvočíslo.	■	□
4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	■	□
4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	□	■

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

5

5.1 15 = 3 · 5; 20 = 2 · 2 · 5; n(15; 20) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60

5.2 150 = 2 · 3 · 5 · 5; 180 = 2 · 2 · 3 · 3 · 5; D(150; 180) = 2 · 3 · 5 = 30

5.3 10 = 2 · 5; 25 = 5 · 5; n(10; 25) = 2 · 5 · 5 = 50

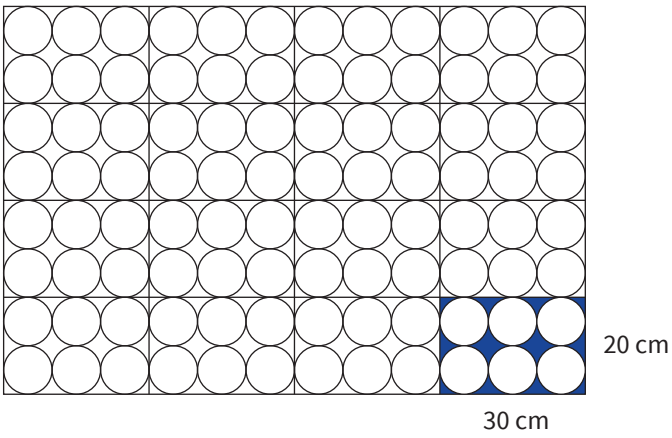
5.4 100 = 2 · 2 · 5 · 5; 160 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5; D(100; 160) = 2 · 2 · 5 = 20

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50
F) 60

5.1. **F**
5.2. **C**
5.3. **E**
5.4. **B**

Ověřujeme znalost výpočtu nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

6 Krabice lze na paletu umístit po celé délce i šířce (na orientaci nezáleží). Na paletě je $6 \cdot 16 = 96$ koulí.



Rozměr a počet krabic nemají pro výpočet zásadní smysl. Slouží pouze pro upevnění koulí a vizualizaci úlohy. Určíme počet koulí, které lze umístit do jedné krabice (známe poloměr koule) a vynásobíme počtem krabic.

7 Průměrná hodnota $\frac{8+6+5+5+6}{5}\,°C = \frac{30}{5}\,°C = 6\,°C$

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

8 $\frac{(-1)\cdot|-2|}{(-3)} \cdot \frac{(-5+4)}{|-5+4|} = \frac{(-1)\cdot 2}{(-3)} \cdot \frac{(-1)}{1} = -\frac{2}{3}$

A) $\frac{2}{3}$

B) -2

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) $-\frac{2}{3}$

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

9

9.1 Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná. — A ■ N □

9.2 Součin lichého počtu záporných čísel je záporný. — A □ N ■

9.3 Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný. — A □ N ■

Klademe důraz na správné přečtení zadání.

9.1 Rozlišíme pojmy kladné a nezáporné číslo (resp. záporné a nekladné číslo).

9.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

10 10.1 $(-2) + 3 = 1$

10.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2$

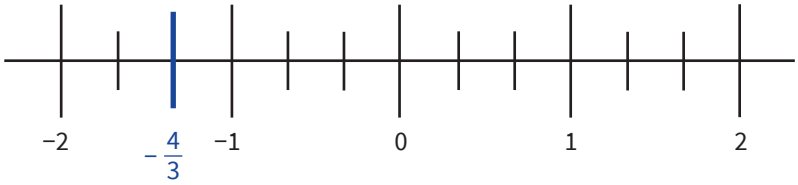
10.3 $(-2) \cdot (-1^2) = 2$

10.4 $(-3) - (-2) = -1$

A)	−1	10.1	**D**
B)	−2	10.2	**B**
C)	−5	10.3	**E**
D)	1	10.4	**A**
E)	2		
F)	5		

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze 10.2 a 10.3 je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1)^2 = -1$.
Úlohu 10.4 lze řešit jako rozdíl dvou záporných čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

11 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose. Číselná osa pomáhá vyznačit správný počet třetin.

12 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{2}{3}+2}{2} = \dfrac{1}{\frac{2+1}{2}} + \dfrac{\frac{2+6}{3}}{2} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} + \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

13 35 ... 100 % ⇒ 50 ... 143 % – změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, co je základ tedy, kolik je 100 %. Řešíme pomocí trojčlenky nebo také výpočtem 1 %.

14 14.1 12 395 ≐ 12 000 — A ■ N □

14.2 na stovky 12 395 ≐ 12 400 — A ■ N □
na desítky 12 395 ≐ 12 400

14.3 12 395 = 12 395 – zůstane stejné — A □ N ■

V úloze 14.2 porovnáme oba výsledky zaokrouhlení.
Úloha 14.3 může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“.
Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

15 15.1 $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S$

15.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C$

15.3 $l' : l = 5 : 10 \Rightarrow l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l$

15.4 1 hod = 60 min ... 100 % ⇒ 75 min ... 125 % – změna 25 %

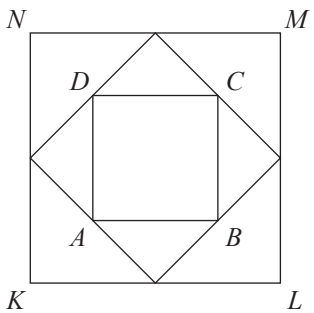
Úloha 15.1 může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah. Úloha 15.2 je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina. V úloze 15.4 žák nejprve převede základ 1 hod na 60 minut.

A) 25 %
B) 50 %
C) 75 %
D) 100 %
E) 125 %
F) 175 %

15.1. **E**
15.2. **C**
15.3. **B**
15.4. **A**

16 Platí pro každé reálné číslo.

17 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$, poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční“ a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

18 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 ..... 100 %
3 ..... x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 %.

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

A) 22,5 %
B) 25 %
C) 30 %
D) 33 %
E) 56 %

19 19.1 Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění. A ☐ N ■

19.2 Absolutní hodnota nuly je nula, správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná. A ☐ N ■

19.3 Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné. A ■ N ☐

Úloha 19.1 může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha 19.2 vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha 19.3 může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

20 20.1 $(\sqrt{2})^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

20.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

20.3 $-\sqrt{4} = -2$

20.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

A) -2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

D) 2

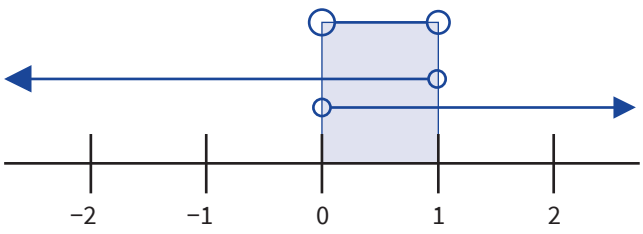
E) 4

F) neexistuje

20.1	**E**
20.2	**D**
20.3	**A**
20.4	**C**

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

21



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; ...).

22 $A = R_0^+/\{1\}$ nebo $A = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha 21). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

23 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5)$

A) $(-1; 2)$
B) $(-\infty; \infty)$
C) $(-\infty; 2\rangle$
D) $\langle -1; 5\rangle$
E) $(-1; 5)$

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalů A, B a C na číselné ose.

24

		A	N
24.1	$Z^+ \subset R^+ \Rightarrow Z^+ \cap R^+ = Z^+$	■	□
24.2	$(-1; +1) \subset \langle -1; +1\rangle$	□	■
24.3	$N \subset R$	■	□

Úlohy 24.1 a 24.3 ověřují znalosti číselných množin. V úloze 24.2 je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

25 **Přiřaďte ke každé množině správný interval.**

25.1 $R^+ = (0; \infty)$

25.2 $R^- \cap R^+ = \emptyset = (0; 0)$

25.3 $R_0^- \cup R_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty)$

25.4 $R_0^- \setminus \{0\} = R^- = (-\infty; 0)$

A) $(1; \infty)$
B) $(0; 0)$
C) $(-\infty; \infty)$
D) $\langle 0; 0\rangle$
E) $(-\infty; 0)$
F) $(0; \infty)$

25.1	**F**
25.2	**B**
25.3	**C**
25.4	**E**

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověď A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy 21 a 22).

ŘEŠENÍ – ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $-a+3$

2 b $\frac{11}{2}$

3
I. B
II. D
III. A

4 $(-a^3+5)^2 = a^6 - 10a^3 + 25$

Kvadratický člen v mnohočlenu chybí, tzn. že koeficient je roven 0.

5 $-\frac{18}{k(k+3)}$

6 $(1+2\sqrt{3}-x)(1+x)$

7 E

8
I. D
II. B
III. E

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\\[2ex] x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+3}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{4}-1+3}{\frac{1+2}{2}}=\frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+2\cdot 4}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+8}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

2 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2-2x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve −3 a potom 1.

$$A=-\frac{4(-3)}{(-3)^2-4}=-\frac{-12}{9-4}=\frac{12}{5}$$

$$B=-\frac{4\cdot 1}{1^2-4}=-\frac{4}{1-4}=\frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\cancel{12}^{3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku...

$\frac{4}{3}$ ..... *100 %*

$\frac{12}{5}$ ..... *x %*

x = 180 %

... tedy o 80% větší.

3 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$$x^2-x-6\neq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1\neq\frac{1+5}{2}\Rightarrow x_1\neq 3$$

$$x_2\neq\frac{1-5}{2}\Rightarrow x_2\neq -2$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$

$$x^2-2x-3=2(x^2-x-6)$$

$$x^2-2x-3=2x^2-2x-12$$

$$-x^2=-9$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x=\pm 3$, ale hodnota $x=3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru.
Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x=-3$.

4 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x + 0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x + 0{,}5x$	$0{,}5p(x + 0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x + 0{,}5x)$	$0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x)$

$0{,}3px + 0{,}5p(x + 0{,}5x) + 0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x) = 0{,}3px + 0{,}5px + 0{,}25px + 0{,}4px + 0{,}2px = 1{,}65px$ D)

5 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

5.1

$\frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ B)

5.2

$\frac{x - 1}{\frac{x}{x + 1}} \Rightarrow x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1$ D)

5.3

$\frac{x + 1}{\frac{x - 1}{x}} \Rightarrow x - 1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 0$ C)

6 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a^2 - 2)^2 - (4 - a^2)^2 - 4 = \left[(a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2 + 2^2\right] - \left[4^2 - 2 \cdot 4 \cdot a^2 + (a^2)^2\right] - 4 = a^4 - 4a^2 + 4 - (16 - 8a^2 + a^4) - 4 =$

$= a^4 - 4a^2 + 4 - 16 + 8a^2 - a^4 - 4 = 4a^2 - 16 = 4(a^2 - 4) = 4(a - 2)(a + 2)$

7 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$(a + 2)^3 + (a - 2)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 + a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 - 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 - 6a^2 + 12a - 8 =$

$= 2a^3 + 24a = 2a(a^2 + 12)$

8 $3a^2x - 6ax - 2a^2y + 4ay = 3ax(a-2) - 2ay(a-2) = (a-2)(3ax - 2ay) = a(a-2)(3x-2y)$

9 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x):B(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - x - 6):(x^2 + x - 3) = x + 2 \\
\underline{-x^3 - x^2 + 3x} \\
\quad 2x^2 + 2x - 6 \\
\quad \underline{-2x^2 - 2x + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

B) $A(x) = (x+2)\cdot B(x)$

10 10.1 A N

Postupujeme dle vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, kde $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

10.2 A N

$$(3x+3)^2 + (4x+4)^2 = 9x^2 + 18x + 9 + 16x^2 + 32x + 16 = 25x^2 + 50x + 25 = (5x+5)^2$$

10.3 A N

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$$

10.4 A N

$$(x+2)^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 5 = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

11 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$

$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$

$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$

$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$

$$(x-1)^2 = A^2(x)$$

$A(x) = x - 1$ D)

12 $\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)=\frac{x(x-2)+x(x+2)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x\cdot x-4}{x}=\frac{x^2-2x+x^2+2x}{\cancel{x^2-4}}\cdot\frac{\cancel{x^2-4}}{x}=\frac{2\cancel{x^2}^{2x}}{\cancel{x}}=2x$

podm.: $x\neq\pm2;\ x\neq0$

13 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)=\left[\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{a-1-2a}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{-a-1}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=$

$=\frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{-\cancel{(a-1)}}{a}=\frac{1}{a}$

podm.: $a\neq\pm1;\ a\neq0$

14 $\frac{1+\frac{1}{a-2}}{a-\frac{1}{2-a}}=\frac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{-\frac{(a-1)^2}{2-a}}=\frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}}\cdot\left[-\frac{\cancel{2-a}}{\cancel{(a-1)^2}_{1-a}}\right]=\frac{1}{a-1}$

podm.: $a\neq1;\ a\neq2$

15 $1+\frac{1}{1+\frac{1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a}{a-1}}=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{a-1}{a}=1+\frac{a-1}{a}=\frac{a+a-1}{a}=\frac{2a-1}{a}$ B)

16 Výraz není definován pro takové $x\in\mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x}}\Rightarrow1+\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq-2\wedge x\neq0$

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1+\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2+2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+4}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq-4\wedge x\neq-2$

$\frac{x+2}{1+\frac{4}{x-2}}\Rightarrow1+\frac{4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x-2+4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x-2}\neq0\Rightarrow x\neq\pm2$ C)

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1-\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2-2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq0\wedge x\neq-2$

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x}}\Rightarrow1-\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x-2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq2\wedge x\neq0$

17 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

17.1 A N

$$\frac{A(a)}{B(a)} = \frac{\frac{2a}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}} = \frac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \frac{2}{a-1}$$

17.2 A N

$$\frac{B(a)}{A(a)} + 1 = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{2a}{a^2-1}} + 1 = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \frac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \frac{a-1}{2} + 1 = \frac{a-1+2}{2} = \frac{a+1}{2}$$

17.3 A N

$$A(a) - B(a) = \frac{2a}{a^2-1} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{3a-a^2}{a^2-1}$$

17.4 A N

$$A(a) + B(a) = \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a+1} = \frac{2a + a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \frac{a}{a-1}$$

18 $$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$$

popř.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1) + (x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$$

19 $$(\sqrt{x})^{-1} + (\sqrt{x})^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{x\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x}+x}{x \cdot x} = \frac{\cancel{x}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x}^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

20 $\sqrt{x}+\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad /\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x}+1=2 \qquad /-1$$

$$\sqrt{2x}=1 \qquad /^2$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad \text{C)}$$

21 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$$V(a,b)=(a^{-16}b^{4})^{\frac{1}{8}}=a^{\overset{-2}{\cancel{-16}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}b^{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}=a^{-2}b^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{b}}{a^2}$$

$$V(\sqrt{5},25)=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}^2}=\frac{5}{5}=1 \qquad \text{A)}$$

22 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

22.1

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2-x}}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1 \\ 2-x>0\Rightarrow 2>x \end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\langle -1;2) \qquad \text{E)}$$

22.2

$$\frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow 4-x^2>0\Rightarrow x^2<4\Rightarrow |x|<2\Rightarrow x\in(-2;2) \qquad \text{D)}$$

22.3

$$\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\Rightarrow\frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

$$(x+2\geq 0\wedge x+1>0)\vee(x+2\leq 0\wedge x+1<0)$$

$$(x\geq -2\wedge x>-1)\vee(x\leq -2\wedge x<-1)$$

$$x\in(-1;\infty) \quad x\in(-\infty;-2\rangle$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty;-2\rangle\cup(-1;\infty) \qquad \text{A)}$$

ŘEŠENÍ – ROVNICE A NEROVNICE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 B

2 $K = (-\infty; 10\rangle$

3 $x \neq 3$, $K = \{0\}$

4 Úkol bude splněn po 21 dnech.

5
I. A
II. A
III. A
IV. A

6 D

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich *x-ová* a *y-ová* souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [3; a] \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \Rightarrow 9 + 2a = 5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$
$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [b; 4] \Rightarrow 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \Rightarrow 3b + 8 = 5 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$
$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

$$x = 10 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 10): \dfrac{10^2 - 3}{\sqrt{10 - 1}} = \dfrac{100 - 3}{\sqrt{9}} = \dfrac{97}{3} = 32\dfrac{1}{3} \\ P\,(x = 10): \dfrac{10}{2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 10) \neq P\,(x = 10)$$

$$x = 5 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 5): \dfrac{5^2 - 3}{\sqrt{5 - 1}} = \dfrac{25 - 3}{\sqrt{4}} = \dfrac{22}{2} = 11 \\ P\,(x = 5): \dfrac{5}{2} = 2{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 5) \neq P\,(x = 5)$$

$$x = 4 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 4): \dfrac{4^2 - 3}{\sqrt{4 - 1}} = \dfrac{16 - 3}{\sqrt{3}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}} \\ P\,(x = 4): \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 4) \neq P\,(x = 4)$$

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 2): \dfrac{2^2 - 3}{\sqrt{2 - 1}} = \dfrac{4 - 3}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ P\,(x = 2): \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 2) = P\,(x = 2)$$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 1): \dfrac{1^2 - 3}{\sqrt{1 - 1}} = \dfrac{1 - 3}{\sqrt{0}} \text{ výraz není definován} \\ P\,(x = 1): \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pro } x = 1 \text{ rovnice není definována}$$

Z provedené zkoušky plyne, že řešením rovnice je $x = 2$. D)

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$$\begin{aligned} 32 + x &= 0{,}96\,(x + 35) \\ 32 + x &= 0{,}96x + 33{,}6 && / -0{,}96x - 32 \\ 0{,}04x &= 1{,}6 && / : 0{,}04 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. 20 % hmotnosti vody ($0{,}2x$) třetina zbytku

hmotnost vody v sudu x

$$135 - 0{,}2x - \frac{1}{2} \cdot 0{,}8x = 79 \qquad / \cdot 3$$
$$405 - 0{,}6x - 0{,}8x = 237 \qquad / \cdot -405$$
$$-1{,}4x = -168 \qquad / : (-1{,}4)$$
$$x = 120$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$l = l_1\,[1 + \alpha(t - t_1)]$$
$$l = l_1 + l_1\alpha(t - t_1)$$
$$l = l_1 + l_1\alpha t - l_1\alpha t_1 \qquad / -l_1 + l_1\alpha t_1$$
$$l - l_1 + l_1\alpha t_1 = l_1\alpha t \qquad / : l_1\alpha$$
$$\frac{l - l_1 + l_1\alpha t_1}{l_1\alpha} = t$$

6

$$\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} = 2x - 4 \qquad / \cdot 6$$
$$3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) = 12x - 24$$
$$3x + 2x + \frac{2x+4}{3} = 12x - 24 \qquad / \cdot 3$$
$$9x + 6x + 2x + 4 = 36x - 72$$
$$17x + 4 = 36x - 72 \qquad / -36x - 4$$
$$-19x = -76 \qquad / : (-19)$$
$$x = 4$$

7 7.1 A ☐ N ■

Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in R$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$. Tvrzení tedy pravdivé není.

7.2 A ■ N ☐

Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 1$$
$$\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 1$$
$$x - 2 = 1 \qquad / + 2$$
$$x = 3$$

7.3 A N

Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in R$. Tvrzení je tedy pravdivé.

7.4 A N

Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnic a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a −2. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad / -x - 2$$
$$x^2 - 4 - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ x - 2y &= -4 \qquad / \cdot 2 \\ \hline 2x + y &= -3 \\ 2x - 4y &= -8 \\ \hline 4x - 3y &= -11 \end{aligned}$$

D)

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$(x + 3)^2 - 4(x - 1)^2 - 2x = -3(x - 2)^2 + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1) - 2x = -3(x^2 - 4x + 4) + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 - 2x = -3x^2 + 12x - 12 + 6x - 1$$
$$-3x^2 + 12x + 5 = -3x^2 + 18x - 13 \qquad / +3x^2 - 18x - 5$$
$$12x - 18x = -13 - 5$$
$$-6x = -18 \qquad / : (-6)$$
$$x = 3$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. Správná odpověď je C).

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x+2}{x^2+x} - 1 \qquad \text{podm.: } x \neq 0;\ x \neq -1$$

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x+2}{x(x+1)} - 1 \qquad / \cdot x(x+1)$$

$$2(x+1) - x \cdot x = 3x + 2 - x(x+1)$$

$$2x + 2 - x^2 = 3x + 2 - x^2 - x$$

$$-x^2 + 2x + 2 = -x^2 + 2x + 2 \qquad / -x^2 + 2x + 2$$

$$0 = 0$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in R - \{-1; 0\}$.

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím menší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci ..... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků ..... x hodin

$$\frac{6}{4} = \frac{x+2{,}5}{x} \qquad / \cdot 4x$$

$$6x = 4(x+2{,}5)$$

$$6x = 4x + 10 \qquad / -4x$$

$$2x = 10 \qquad / : 2$$

$$x = 5$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků ..... 5 hodin
10 soustružníků ..... y hodin

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{y} \qquad / \cdot 6y$$

$$10y = 30 \qquad / : 10$$

$$y = 3$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, $0{,}75x$. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku ..... $0{,}75x$
jmenovatel zlomku x

$$\frac{0{,}75x+2}{x+2}=0{,}8 \qquad /\cdot(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8x+1{,}6 \qquad /-0{,}8x-2$$
$$-0{,}05x=-0{,}4 \qquad /:(-0{,}05)$$
$$x=8$$

Čitatel původního zlomku je roven 8, jmenovatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. 0,75 · 8 = 6.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

13 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-1}{x+9} \qquad /\cdot(x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x\neq-3;\ x\neq-9$$
$$(x-2)(x+9)=(x-1)(x+3)$$
$$x^2+9x-2x-18=x^2+3x-x-3$$
$$x^2+7x-18=x^2+2x-3 \qquad /-x^2-2x+18$$
$$5x=15 \qquad /:5$$
$$x=3$$

$$\frac{y-3}{y+3}=\frac{y-4}{y-1} \qquad /\cdot(y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y\neq-3;\ y\neq1$$
$$(y-1)(y-3)=(y-4)(y+3)$$
$$y^2-3y-y+3=y^2+3y-4y-12$$
$$y^2-4y+3=y^2-y-12 \qquad /-y^2+y-3$$
$$-3y=-15 \qquad /:(-3)$$
$$y=5$$

Řešením rovnic jsou čísla $x = 3$ a $y = 5$. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15 (B).

14 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x^2-4}+2 \qquad \text{podm.: } x\neq\pm2$$
$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{(x-2)(x+2)}+2 \qquad /\cdot(x-2)(x+2)$$
$$2(x+2)+x(x-2)=3+2(x-2)(x+2)$$
$$2x+4+x^2-2x=3+2(x^2-4)$$
$$x^2+4=3+2x^2-8$$
$$x^2+4=2x^2-5 \qquad /-2x^2-4$$
$$-x^2=-9 \qquad /\cdot(-1)$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm3$$
$$K=\{\pm3\}$$

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

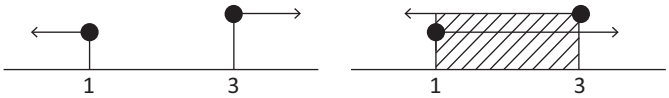
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, jestliže $(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$$

$$(x \geq 3 \wedge x \leq 1) \vee (x \leq 3 \wedge x \geq 1)$$

$$x \in \emptyset \vee x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku ..... $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$$x(x + 17{,}5) = 375$$

$$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1806{,}25}}{2} =$$

$$= \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \text{ nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka 12,5 + 17,5 = 30 cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1056{,}25} = 32{,}5 \text{ cm}$. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x + 1$ (druhá mocnina je $(x + 1)^2$) a největší $x + 2$ (druhá mocnina je $(x + 2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo ..... $x+1$
třetí číslo ..... $x+2$

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 10(x+2)$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 20$$
$$3x^2 + 6x + 5 = 10x + 20 \qquad / - 10x - 20$$
$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} =$$
$$= \frac{4 \pm 14}{6}$$
$$x_1 = \frac{4 + 14}{6} = \frac{18}{6} = 3$$
$$x_2 = \frac{4 - 14}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \text{ nevyhovuje } (x \text{ je přirozené číslo})$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je 3 + 4 + 5 = 12.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$(x+3)^2 - (3x-1)^2 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - (9x^2 - 6x + 1) = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$-8x^2 + 12x + 8 = 0 \qquad / : (-4)$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x_1| = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow |x_2| = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_2| = 4|x_1|$$

Řešením je tedy E.

19 Je-li $x_1 = 3$ řešením rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ x_1 = 3 \end{array}\right\} 3^2 - 3 - b^2 + 5b = 0 \Rightarrow b^2 - 5b - 6 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$b_1 = \frac{5 - 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Nyní do původní rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ b_1 = -1 \end{array}\right\} x^2 - x - (-1)^2 + 5(-1) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{2}} = -2$$

$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven −2.
Řešení je tedy B.

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2} = |x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x - a| \leq b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a - b; a + b \rangle$.

20.1 $(x - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow |x - 1| \leq 1 \Rightarrow x \in \langle 0; 2 \rangle$ C

20.2 $(x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -3; 1 \rangle$ A

20.3 $(x + 1)^2 \leq 9 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 3 \Rightarrow x \in \langle -4; 2 \rangle$ D

22 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 3(2x - 1) - 2(x + 3) &\leq 5x - 1 \\ 6x - 3 - 2x - 6 &\leq 5x - 1 \\ 4x - 9 &\leq 5x - 1 \qquad / - 5x + 9 \\ 4x - 5x &\leq -1 + 9 \\ -x &\leq 8 \qquad / : (-1) \\ x &\geq -8 \Rightarrow x \in \langle -8; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4x - 3) - 5(x + 2) &\geq 4x - 13 \\ 8x - 6 - 5x - 10 &\geq 4x - 13 \\ 3x - 16 &\geq 4x - 13 \qquad / - 4x + 16 \\ 3x - 4x &\geq -13 + 16 \\ -x &\geq 3 \qquad / : (-1) \\ x &\leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \langle -8; \infty) \\ x \in (-\infty; -3\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle -8; -3 \rangle$$

23 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x - 1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)(\cancel{x+1})} \leq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$1 \geq 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$$

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$2(3x-1) - 3[2(x+4) - 3(x-2)] \leq 7(x-5) + 1$$

$$6x - 2 - 3[2x + 8 - 3x + 6] \leq 7x - 35 + 1$$

$$6x - 2 - 3[-x + 14] \leq 7x - 34$$

$$6x - 2 + 3x - 42 \leq 7x - 34$$

$$9x - 44 \leq 7x - 34 \qquad / -7x + 44$$

$$9x - 7x \leq -34 + 44$$

$$2x \leq 10 \qquad / : 2$$

$$x \leq 5$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \leq 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
Řešení je tedy D.

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\frac{2x - \frac{1}{3}(x+4)}{4} + \frac{3x - \frac{1}{4}(x-2)}{3} \leq \frac{3x+1}{2} \qquad / \cdot 12$$

$$3\left[2x - \frac{1}{3}(x+4)\right] + 4\left[3x - \frac{1}{4}(x-2)\right] \leq 6(3x+1)$$

$$6x - (x+4) + 12x - (x-2) \leq 18x + 6$$

$$6x - x - 4 + 12x - x + 2 \leq 18x + 6$$

$$16x - 2 \leq 18x + 6 \qquad / \cdot -18x + 2$$

$$-2x \leq 8 \qquad / : (-2)$$

$$x \geq -4 \Rightarrow x \in \langle -4; \infty) \qquad \text{(A)}$$

26 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

26.1
$$\begin{aligned} 2(3x-1)-3(x+2) &\leq 4x-6 \\ 6x-2-3x-6 &\leq 4x-6 \\ 3x-8 &\leq 4x-6 \qquad /-4x+8 \\ 3x-4x &\leq -6+8 \\ -x &\leq 2 \qquad /:(-1) \\ x &\geq -2 \Rightarrow x \in \langle -2; \infty) \end{aligned}$$

Řešení je tedy B.

26.2
$$\begin{aligned} 4(2x-3)-2(x+1) &\leq 7x-8 \\ 8x-12-2x-2 &\leq 7x-8 \\ 6x-14 &\leq 7x-8 \qquad /-7x+14 \\ 6x-7x &\leq -8+14 \\ -x &\leq 6 \qquad /:(-1) \\ x &\geq -6 \Rightarrow x \in \langle -6; \infty) \end{aligned}$$

Řešení je tedy E.

26.3
$$\begin{aligned} 4(3x-2)-6(x-3) &\leq 7x+15 \\ 12x-8-6x+18 &\leq 7x+15 \\ 6x+10 &\leq 7x+15 \qquad /-7x-10 \\ 6x-7x &\leq 15-10 \\ -x &\leq 5 \qquad /:(-1) \\ x &\geq -5 \Rightarrow x \in \langle -5; \infty) \end{aligned}$$

Řešení je tedy D.

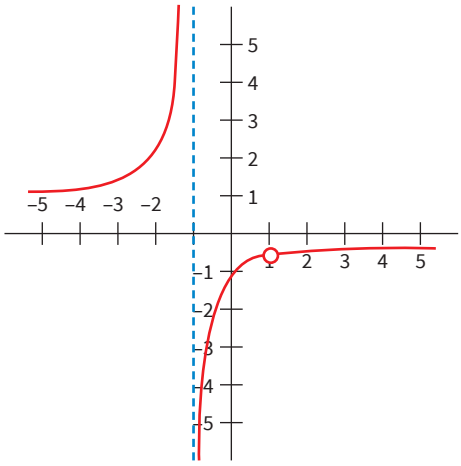
ŘEŠENÍ – FUNKCE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 C

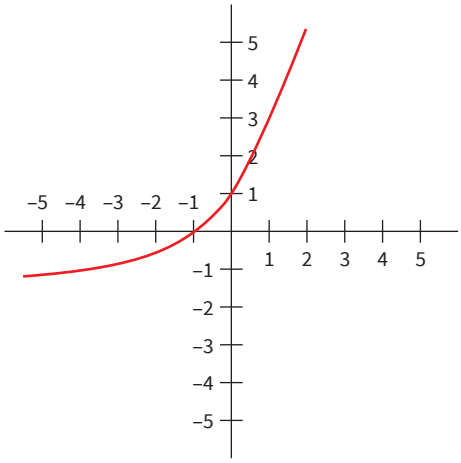
2 $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Grafem je hyperbola s výjimkou jednoho bodu (x = 1)



3 a = –4

4 $P_x[-1; 0]$, $P_y[0; 1]$



5 $K = \{1\}$

6 $K = \{4\}$

7 $\log_5 6 = \frac{p}{3} + \frac{q}{2}$

8 $K = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

Proto musí platit, že: $\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \Rightarrow x \in (3; 5\rangle$

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f: y = \frac{|x-3|}{2x} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

4

4.1. $f_1: y = \frac{2}{|x| - 3} \Rightarrow |x| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq \pm 3$ — A ☐ N ■

4.2. $f_2: y = \frac{x}{x^2 + 3} \Rightarrow x^2 + 3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ — A ■ N ☐

4.3. $f_3: y = \frac{2x + 2}{x + 1} \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ — A ☐ N ■

4.4. $f_4: y = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{2}} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ — A ■ N ☐

5 $A[0; 0]$: $\frac{0^2+0}{0-1} = 0 \Rightarrow$ bod $A[0; 0]$ leží

$B[-1; 0]$: $\frac{(-1)^2+(-1)}{(-1)-1} = \frac{1-1}{-2} = 0 \Rightarrow$ bod $B[-1; 0]$ leží

$C[2; 6]$: $\frac{2^2+2}{2-1} = \frac{4+2}{1} = 6 \Rightarrow$ bod $C[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $\frac{(-3)^2+(-3)}{(-3)-1} = \frac{9-3}{-4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6{,}3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k, **vyjádříme pomocí lineární funkce:**

$$p = 55 - \frac{6{,}3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0{,}063k + 55$

7 $v = at + b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_1 = at_1 + b \Rightarrow 337{,}92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \Rightarrow 350{,}12 = 30a + b \end{array}\right\}$ řešením soustavy je $a = 0{,}61$ a $b = 331{,}82$

Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0{,}61t + 331{,}82$.

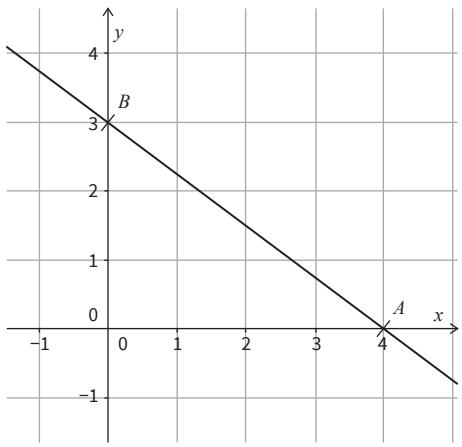
8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A[x; 0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B[0; y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge y = 0) \Rightarrow 0 = -0{,}75x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{0{,}75} = 4 \Rightarrow A[4; 0]$

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -0{,}75 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[0; 3]$

Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



9 9.1. $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ **D**

9.2. $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ **B**

9.3. $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ **E**

10 Grafem funkce f je přímka, která se v osové souměrnosti podle osy x zobrazí opět na přímku. V osové souměrnosti podle osy x se funkční hodnoty původní funkce změní na hodnoty opačné, tzn. $g(x) = -f(x)$.

Proto $g: y = -x - 2$.

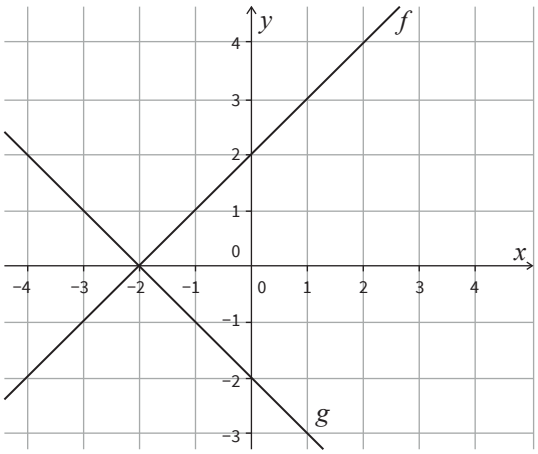
A) $g: y = x + 2$

B) $g: y = -x + 2$

C) $g: y = x - 2$

D) $g: y = -x - 2$

E) $g: y = \frac{1}{x+2}$



11 $f: y = x - 2 \wedge P[x; 1] \in f \Rightarrow 1 = x - 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ funkce se protínají v bodě $P[3; 1]$

$g: y = ax + 4 \wedge P[3; 1] \in g \Rightarrow 1 = 3a + 4 \Rightarrow -3 = 3a \Rightarrow a = -1$

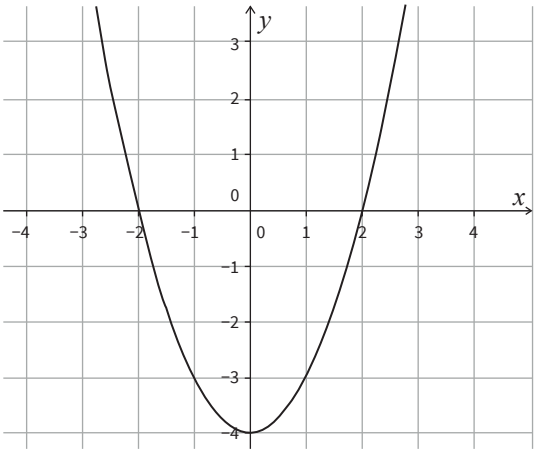
A) $a = -2$

B) $a = -1$

C) $a = -\frac{1}{2}$

D) $a = 1$

E) $a = 2$



12 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je −4, potom funkce prochází bodem $V[0; -4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice [2; 0], potom druhý má souřadnice [−2; 0].

Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}[2; 0]$ a $P_{x2}[-2; 0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f: y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

$V \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -4$
$P_{x1} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$
$P_{x2} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow 0 = 4a - 2b + c$

Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je $a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.
Pro funkci f tedy platí: $f: y = x^2 - 4$

13 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \wedge f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) + 3 = a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$f(a+1) \geq f(a)$

$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$

$2a \geq -3$

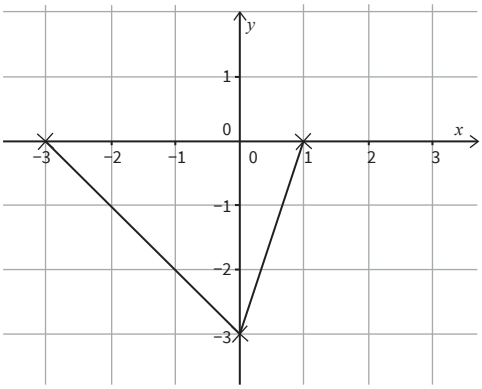
$a \geq -\frac{3}{2}$

$a \in \langle -3/2, \infty)$

14 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.

$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P_1[0; -3]$
$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge y = 0) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow (x = -3 \vee x = 1) \Rightarrow P_2[-3; 0] \wedge P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



15 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj. $f: y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$. V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí $g: y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$.

A) $g: y = x^2 + 4x - 3$

B) $g: y = x^2 - 4x + 3$

C) $g: y = -x^2 + 4x + 3$

D) $g: y = x^2 - 4x - 3$

E) $g: y = -x^2 - 4x + 3$

16 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 4 = a^{-1+1} + b \Rightarrow 4 = a^0 + b \Rightarrow 4 = 1 + b \Rightarrow b = 3$
$B[2; 11] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 11 = a^{2+1} + b \Rightarrow 11 = a^3 + 3 \Rightarrow 8 = a^3 \Rightarrow a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

17 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\frac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$

$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$

$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$

$$\frac{2}{a-1} > 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$a \in (1, \infty)$$

18 Exponenciální funkce $y = a^x$ je definována pro všechna $a \in R^+ - \{1\}$. U uvedených funkcí ověříme, zda základ a vyhovuje příslušné podmínce.

$f: y = (\cos 2\pi)^{x+1} \Rightarrow a = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$g: y = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{2x+1} \Rightarrow a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ vyhovuje podmínce, je exp. fce

$h: y = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4\right)^{x-1} \Rightarrow a = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$l: y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{x+3} \Rightarrow a = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

19

$$2^{3-x} + 2^{1-x} = 40$$
$$2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} = 40$$
$$2^{-x}(2^3 + 2^1) = 40$$
$$2^{-x}(8 + 2) = 40$$
$$2^{-x} \cdot 10 = 40$$
$$2^{-x} = 4$$
$$2^{-x} = 2^2$$
$$x = -2$$

A) (−5; −3)

B) (−3; −1)

C) (−1; 1)

D) (1; 3)

E) (3; 5)

20 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$\log_2(x-3) = \log_3 9$

$\log_2(x-3) = 2$

$2^2 = x - 3$

$4 = x - 3$

$x = 7$

21

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{1-2\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\sqrt{3}} = \frac{3(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} =$$

$= \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 6$

22 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \wedge \sin x \geq 0) \Rightarrow \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in Z$.

23

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{-(1 - \sin^2 x)} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin x \cancel{\cos x}}{-\cos^{\cancel{2}} x} = -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\operatorname{tg} x$$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \Rightarrow \sin^2 x \neq 1 \Rightarrow \sin x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

24 **Využijeme grafické řešení.**

Z obrázku jsou patrné příslušné tři průsečíky.

Průsečíky v bodech $x = 0$ a $x = 2\pi$ nevyhovují intervalu, na kterém řešení hledáme.

A) 0 řešení

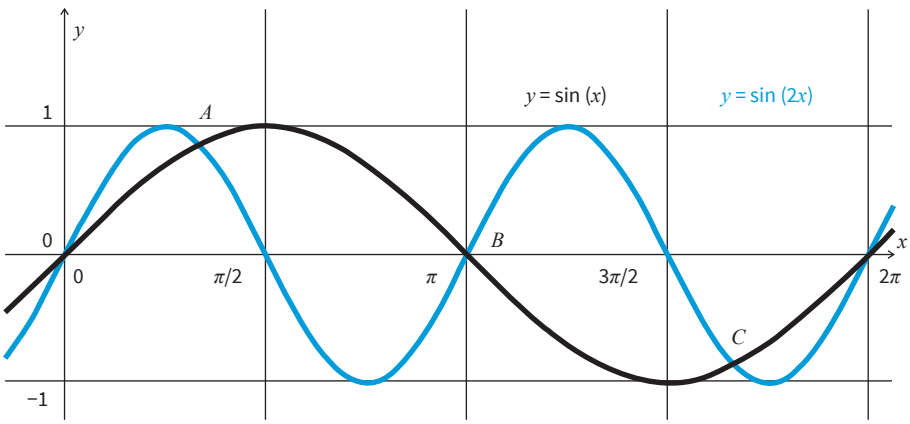
B) 1 řešení

C) 2 řešení

D) 3 řešení

E) 4 řešení

Využijte grafů obou funkcí.



25

25.1. $y = 2\sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right] \end{cases}$

25.2. $y = \cos x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3}+4}{2} \Rightarrow B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right] \\ \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

25.3. $y = \mathrm{tg}\, x - 3 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{\sqrt{3}-9}{3} \\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \Rightarrow C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right] \end{cases}$

A) $A\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right]$

B) $B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right]$

C) $C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right]$

D) $D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right]$

E) $E\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}+2}{3}\right]$

25.1. **D**
25.2. **B**
25.3. **C**

26 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

A) 0

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

D) $\frac{3}{2}\pi$

E) 2π

ŘEŠENÍ – POSLOUPNOST A FINANČNÍ MATEMATIKA

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $a_1 = 3$

2 7 975

3 98 550

4 $a_1 = 1\,300$ Kč, $a_2 = 2\,100$ Kč, $a_3 = 2\,900$ Kč, $a_4 = 3\,700$ Kč

5 855

6 $s_8 = \frac{6\,305}{243} \doteq 25$

7 $a_{10} \doteq 0{,}04$ cm, $s_{15} \doteq 23{,}38$ cm^2

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 A) $a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ posloupnost není aritmetická

D) $\frac{a^2}{a_1} \neq \frac{a^3}{a_2}$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} + \frac{4^2 - 3 \cdot 4}{5} = 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný. V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5) \cdot d$

$d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení:

$d = 0{,}08$ m

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5) \cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14 \cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$d = \frac{9 - 2a_1}{10}$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12$; $a_n = 96$; $d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$
$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_{15} = \frac{15}{2} \cdot (12 + 96)$

$s_{15} = 810$

5 5.1 Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20$; $d = 3$; $n = 9$;

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9 - 1) \cdot 3$
$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot d)$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\frac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 6.1 Počty kostek v šedých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet šedých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n - 1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma. Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98$

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n - 1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144$

A) méně než 98
B) 98
C) 108
D) 140
E) více než 140

6.1 **B**
6.2 **E**

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

7 7.1 $q = \sqrt{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ A ☐ N ■

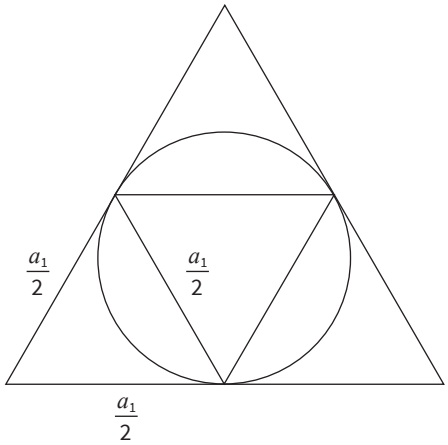
7.2 $a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ A ■ N ☐

7.3 $a_3 + a_4 + a_5 = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{38}{81}$ A ■ N ☐

7.4 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$ A ☐ N ■

Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

8 8.1 Délky stran jednotlivých trojúhelníků tvoří členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 1$ m. Abychom si lépe představili hodnotu kvocientu, je vhodné si druhý největší trojúhelník pootočit tak, aby jeho vrcholy ležely ve středech stran největšího trojúhelníku.



Geometrická posloupnost má tedy kvocient $q = \frac{1}{2}$.

Čtvrtý člen posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ m = 0,125 m

Pro obvod trojúhelníku platí:

$o_4 = 3 \cdot a_4 = 0{,}375$ m

8.2 $S_n = \frac{\sqrt{3}}{32}$ m^2

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí vztah:

$S_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Z tohoto vztahu vyjádříme strany trojúhelníku:

$a_n = \sqrt{\frac{4S_n}{\sqrt{3}}}$

Po dosazení:

$a_n = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}}$ m = 0,25 m

Pořadí hledaného členu posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$0{,}25 \text{ m} = 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n = 3$ Daný obsah má třetí největší trojúhelník.

Podle Pythagorovy věty má výška rovnostranného trojúhelníku velikost $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Pro obsah rovnostranného trojúhelníku pak dostáváme vztah $S = \frac{a \cdot v}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Úlohu bychom mohli řešit taky pomocí posloupnosti obsahů trojúhelníků. Ta je taky geometrická a její kvocient je druhou mocninou kvocientu posloupnosti délek stran trojúhelníků. Kvocient posloupnosti obsahů je tedy $\frac{1}{4}$ a první člen $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ m^2.

A N

9 K_0 = 400 000 Kč (počáteční výše úvěru)
p = 0,08 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 3 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí (k = 1). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % (k = 0,85).

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Po dosazení:
$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč ≐ 503 885 Kč

10 K_0 = 40 000 Kč (počáteční vklad)
p_1 = 0,02 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
p_2 = 0,013 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n_1 = 3 (počet úrokovacích období)
n_2 =2 (počet úrokovacích období)
k = 0,85 (zdaňovací koeficient)

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n1} = 42\,075 \text{ Kč}$$

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n2}$$
K_5 = 43 010 Kč ≐ 43 000 Kč

A) 42 000 Kč
B) 43 000 Kč
C) 43 600 Kč
D) 44 000 Kč
E) 44 200 Kč

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n_1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n_2}$

11 K_0 = 1 500 000 Kč (počáteční výše úvěru)
p = 0,055 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 10 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

11.1 **Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:**

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)$$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10}$ ≐ 2 562 000 Kč

11.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Po dosazení:

$$p = \sqrt[10]{\frac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq 5{,}2\ \%$$

ŘEŠENÍ – PLANIMETRIE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 135°

2 $S = 90\ cm^2$

3 4 cm, $(80 - 32\sqrt{3})$cm

4 $\frac{64}{25}$

5 $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$, $\alpha \doteq 99°36'$

6 C

7 $2\sqrt{6}$ cm

2 : 5

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 1.1 D
1.2 B
1.3 E
1.4 A

Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

2 2.1 C
2.2 A
2.3 B
2.4 F

2.1 *Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou p, ale obě, tedy přímky q i r.*
2.3 *Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem AB (tedy k) bez krajních bodů A a B.*
2.4 *Jde o osu úsečky AB, což je přímka p, protože je na AB kolmá a prochází jejím středem.*

3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

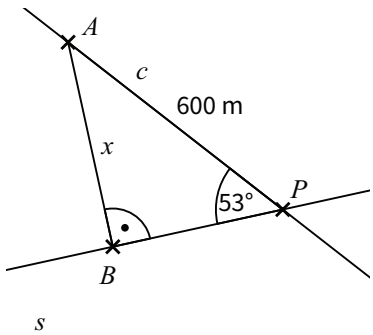
$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}\,\text{km} = 0{,}6\,\text{km} = 600\,\text{m}.$

Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka s, lesní cesta jako přímka c. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu P do bodu A. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice x vedené z bodu A na přímku s.

V pravoúhlém trojúhelníku ABP platí: $\frac{x}{|AP|} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\,\text{m} \doteq 480\,\text{m}$

A)



4 4.1
V pravoúhlém trojúhelníku ACD s odvěsnami AC a CD platí:

$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\,\text{cm}^2$

$S = 7\,\text{cm}^2$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

4.2
Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany a, b)

Protože máme zadány strany b a c a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$

$S = 7{,}66\,\text{cm}^2$

$S \doteq 8\,\text{cm}^2$

5 Pomůže nám obrázek vpravo.

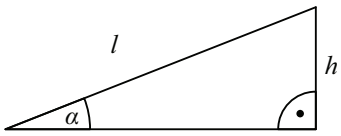
Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin \alpha = \frac{h}{l}$;

kde h se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy $h = (630 - 440)\ \text{m} = 190\ \text{m}$

$\sin \alpha = \frac{190}{2100} = 0{,}905$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}905) = 5{,}19°$

A)



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

6 6.1 $v = 8 \cdot \text{tg}\ 35° = 5{,}6\ \text{m}$, tedy B)

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \text{m}$, tedy A)

6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

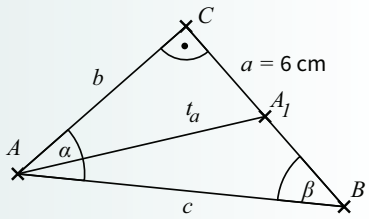
$v = 5{,}9\ \text{cm}$, tedy C)

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

	A	N
7.1 Je-li $\alpha = 30°$, pak $c = 12$ cm.	●	○
7.2 Je-li $b = 4$ cm, pak $t_a = 5$ cm.	●	○
7.3 Je-li $b = 4$ cm, pak $c = 8$ cm.	○	●
7.4 Je-li $\beta = 50°$, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.	○	●

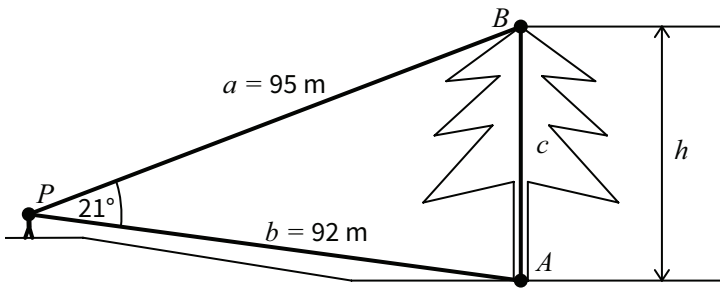
__7.1__ $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2}$,
tedy $c = 2a = 12$ cm
__7.2__ Těžnice t_a spojuje vrchol A se středem strany a, tedy bodem A_1.
$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3$ cm
Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 platí
$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$t_a^2 = 4^2 + 3^2$
$t_a = 5$ cm
__7.3__ $c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{52}$ cm ≐ 7,21 cm ≠ 8 cm
__7.4__ Je-li $\beta = 50°$, pak je
$\alpha = 90° - 50° = 40°$
Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musím mít dva vnitřní úhly shodné.



8 Pomůžeme si obrázkem.
V trojúhelníku ABP známe dvě strany a úhel, který svírají.
Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m

D)



Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.

9 9.1
Protože skutečná délka arboreta je 7 500krát větší než na plánu a skutečná šířka je také 7 500krát větší než na plánu, je skutečná rozloha 7 500²-krát větší než rozloha na plánu.
$S = 3{,}84 \cdot 7\,500^2\ \text{cm}^2 = 2{,}16 \cdot 10^8\ \text{cm}^2 = 21\,600\ \text{m}^2$
$S = 2{,}16$ ha

9.2
Označme délku arboreta jako a, šířku jako b. Protože má být délka o polovinu větší než šířka, platí $a = 1{,}5b$
$S = a \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$1{,}5b \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$b^2 = 14\,400\ \text{m}^2$
$b = 120$ m
$a = 180$ m

10 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten neodpovídá zadání, úhel u vrcholu A např. neměří přesně 60°. Budeme muset obě délky vypočítat.
V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{|AC|}{8\ \text{cm}} = \cos 60°$$

$$|AC| = 4\ \text{cm}$$

Stranu BD vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu A, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

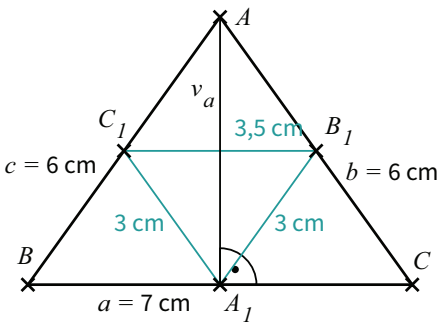
Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.
$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$
Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}79795\ldots$ cm
Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi
$9{,}798 : 4 = 2{,}44948\ldots : 1$
Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$.

C)

11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný.
Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$

Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.

$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$

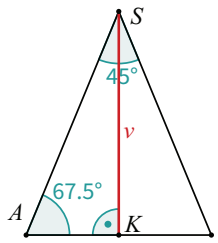
$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm

Dosadíme do vzorce: $S = \frac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057\ \text{cm}^2$

$S \doteq 17\ \text{cm}^2$ A)

12 12.1
Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost 360° : 8 = 45°, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

12.2
Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$\frac{v}{|AK|} = tg\ 67{,}5°$

$v = 2{,}5\ \text{m} \cdot tg\ 67{,}5° = 6{,}036\ \text{m}$

Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09\ \text{m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy 3 . 15,09 m² = 45,27 m² ≐ 45 m²

13 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$2S = (a+c) \cdot v \quad / : v$

$\frac{2S}{v} = a + c \quad / - c$

$\frac{2S}{v} - c = a$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm.

E)

14 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

$S = a \cdot v;\ S = \frac{e \cdot f}{2}$

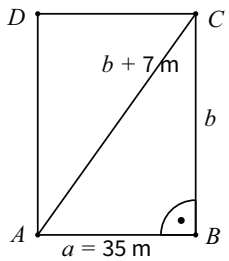
Platí tedy $a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2}$. Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$a = \frac{e \cdot f}{2v}$

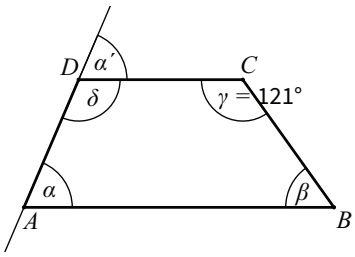
$a \doteq 11$ cm

A)

15 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.
Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.
Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.
Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84$ m².
$S = 2\,940$ m²



16 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α' (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α', proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.
Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.



Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\frac{2}{3}\delta$:

$\frac{2}{3}\delta + \delta = 180°$

$\delta = 108°$

$\alpha = 72°$

Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy 72° – 59° = 13°.

17 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem (400 – 2 x 80) m = 240 m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce o = 240 m.

$o = 2\pi r$

$r = \frac{o}{2\pi}$

$r = 38{,}197\ \text{m} \doteq 38\ \text{m}$

18 18.1

Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$S = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$

$S = \pi \cdot (11^2 - 8^2)$

$S = 57\pi$

E)

18.2

Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\pi$

C)

18.3

Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu r_1 = 15, poloměr většího kruhu r_2 = (15 + 10) = 25.

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi$

D)

19 Délku oběžné dráhy vypočítáme jako délku kružnice s poloměrem 384 400 km: $o = 2\pi r$ = 2 415 256 km.
Tuto dráhu vykoná Měsíc za 27,3 dne. Za jeden den tedy urazí dráhu 27,3x kratší.
s = 88 471 km ≐ 88 000 km

E)

20 20.1 F
20.2 C
20.3 A
20.4 D

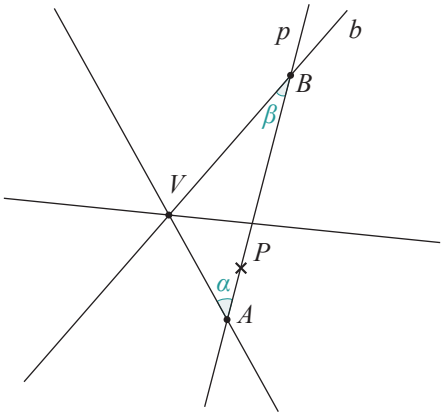
20.1 *Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu $S[1; 1]$ o 90° v záporném smyslu, již to vychází.*

20.2 *Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.*

20.3 *Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.*

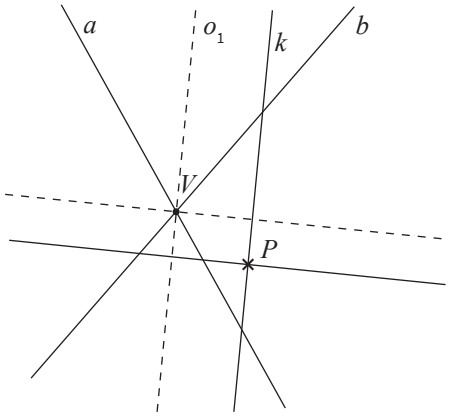
20.4 *Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor u = (–2; 1).*

21 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.

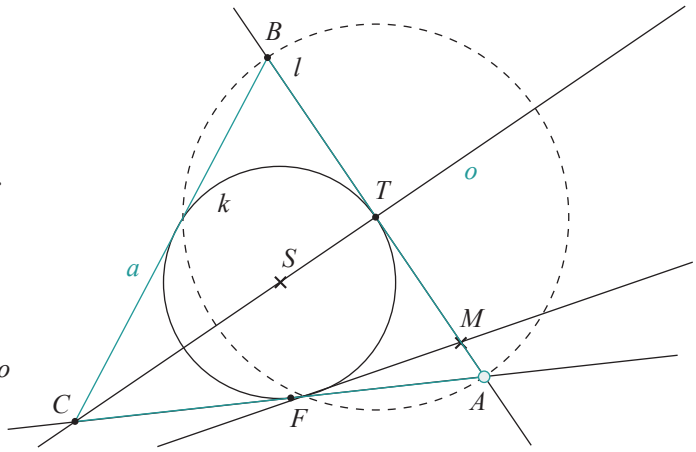


Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

22 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A a (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



ŘEŠENÍ – STEREOMETRIE

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 A

2 Přibližně 2,06 cm od podstavy.

3 A

4 $v \doteq 14{,}2$ cm

5 492,4 cm^3

6 O $(3x^2 + 18)$ cm^2

7 216°

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle.
Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je
$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je
$S' = 6 \cdot (0{,}75a)^2 = 6 \cdot 0{,}75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}5625$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25% původního povrchu.

Změní – li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch **o 43,75 %**.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}5625 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch …? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je 100 % – 56,25 % = 43,75 %.

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$.

S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu $\sin 390° = \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$, $V = 18 \cdot 24 \cdot 8 = 3456$ cm^2.

E) jiná možnost

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268{,}1$ cm^3.

Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268{,}1$ cm^3 = 804, 25 cm^3

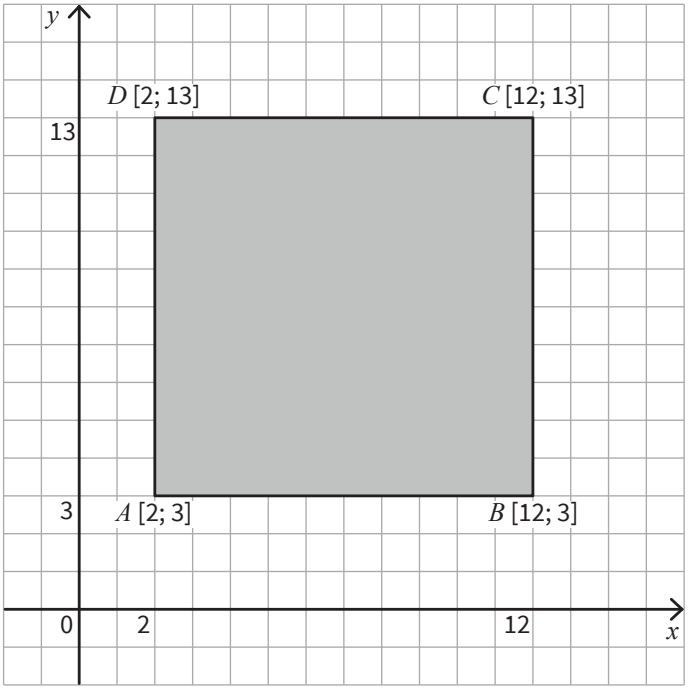
a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804{,}25$ cm^3, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule

$S = 4\pi \cdot R^2 =$ **418 cm^2**.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ j^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13\ j$. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

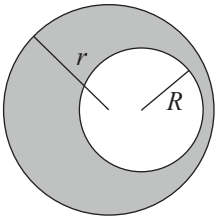
Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3} a^2 v =$ **433,3 j³**.

5 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavy válečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě:

Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.



Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ ... 35%
$\pi \cdot r^2$ ... 100%

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28$ cm.

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.

Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

$S = 2 \cdot (\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$

$S = 2\pi\,(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v)$

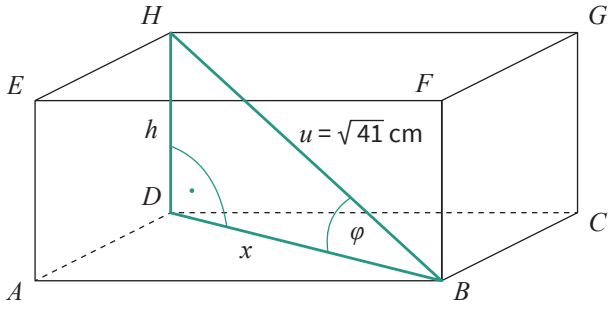
$S \doteq$ **8080 cm²**

6 6.1

Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin \varphi = \frac{h}{u} \quad \Rightarrow \quad h = u \cdot \sin 28° \doteq$ **3 cm**

K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.



6.2

Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos \varphi = \frac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad x = u \cdot \cos 28° \doteq 5,65$ cm

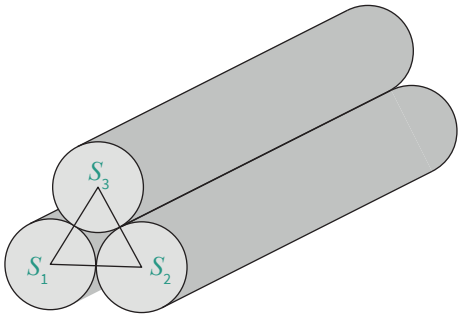
Navíc podstava je čtverec:

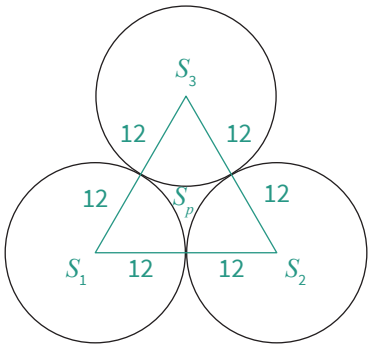
$x = \sqrt{2} \cdot |AB| \quad \Rightarrow \quad |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

Povrch celého kvádru je:

$S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq$ **80 cm²**

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný:





Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru.
K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů.
Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \doteq 249,4$ cm²

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226,1$ cm² *(při použití 3,14 místo π)*

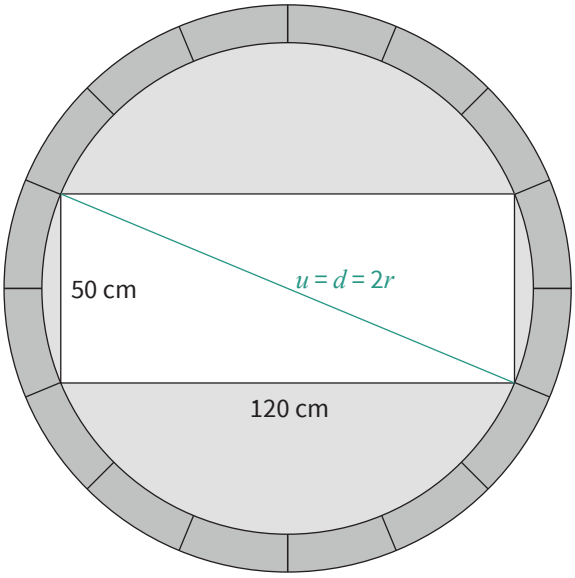
Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$S_p - S_1 = 23,3$ cm²

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu v = 300 cm:

$V = S_p \cdot v = 6990$ cm³ $\doteq$ **7 dm³**

8



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz. obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce“, což odpovídá 74 % hloubky studně.

$u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130\text{ cm} = 1{,}3\text{ m}$

$r = 0{,}65\text{ m}$

$60\text{ hl} = 6000\text{ l} = 6000\text{ dm}^3 = 6\text{m}^3$

$0{,}74 \cdot V = 6$

$V \doteq 8{,}1\text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$

$\boldsymbol{v \doteq 6{,}1\text{ m}}$ **A)**

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729\text{ cm}^2 = 12\pi\text{ cm}^2$.

Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:

$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.

Pro délku hrany krychle platí: $a = \frac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.

Objem krychle je potom: $V = a^3 =$ **8 cm³**.

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.

V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm,

poloměr horní podstavy je $r_2 = 12$ cm

a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.

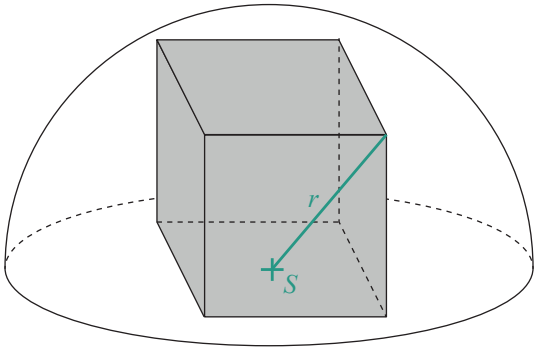
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$.

Objem kyblíku je tedy: $V = 7671{,}77\text{ cm}^3$,

tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7671{,}77\text{ cm}^3 = 92061\text{ cm}^3 \doteq$ **92 litrů**.

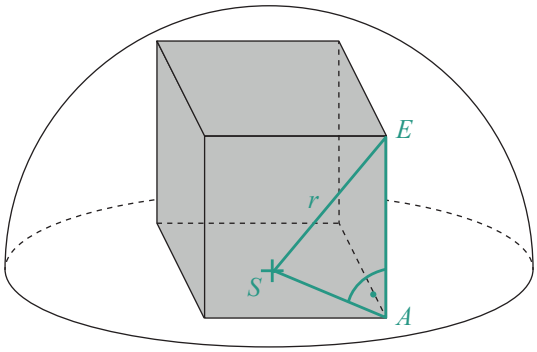
11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle.

Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAE:

$r^2 = 8^2 + (\sqrt{32})^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{96}\text{ cm} = 4 \cdot \sqrt{6}\text{ cm}$

Pro délku vnitřního průměru misky platí: $\boldsymbol{d = 8 \cdot \sqrt{6}\text{ cm}}$

12 12.1 A ☒ N ☐

$S_{koule} = S_{krychle}$

$4\pi r^2 = 6a^2$

$r^2 = \frac{3a^2}{2\pi}$

$r = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$

$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq \mathbf{1{,}38}\boldsymbol{a}^3$

$V_{krychle} = a^3$

$\boldsymbol{V_{krychle} < V_{koule}}$

12.1) V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2) Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3) Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

12.2 ☒ ☐

$3 \cdot 10^8\text{ cm}^3 + 4 \cdot 10^6\text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^5\text{ dm}^3 + 4 \cdot 10^6\text{ dm}^3 =$
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\text{dm}^3 = 4\,300\,000\text{ dm}^3 = 4\,300\,000\text{ l} = 43\,000\text{ hl}$

12.3 ☐ ☒

V = 1,5 l

$\frac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\text{ l} = 900\text{ ml}$

ANALYTICKÁ GEOMETRIE – ŘEŠENÍ

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 $A = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$

2 $D[-8; 1]$

3 $o: x + 2y - 6 = 0$

4 $c = \pm 5\sqrt{2}$

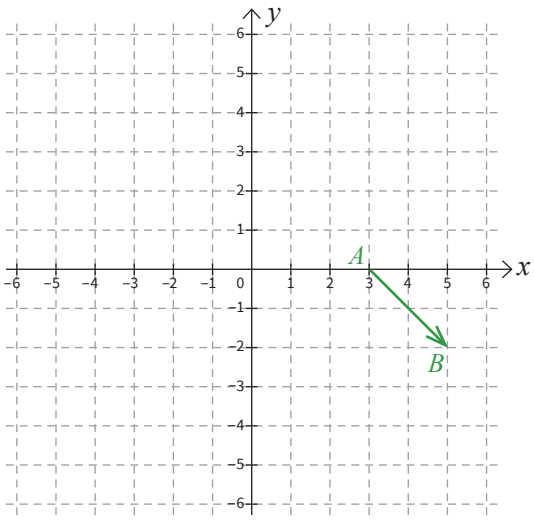
5 Přímky jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod.

6 $\alpha \doteq 36°52'$

7 $m: y + 3 = 0$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 $A[3; 0]$, $B[5; -2]$



Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

C) $\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru (3; –4). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

2 2.1

Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé.

A N

2.2

Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k- násobkem jeden druhého.

A N

2.3

Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p.

A N

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \Rightarrow q: 3x - y + c = 0$

$B \in q: 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -15$

$q: 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \Rightarrow r: x + 3y + c = 0$

$A \in r: 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$r: x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky p zapíše normálový nebo směrový vektor přímky r a rovnici přímky r. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce p.

5 $\overrightarrow{n_{o_{AB}}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \Rightarrow o_{AB}: 4x + 4y + c = 0 \qquad /:4$

$x + y + c = 0$

$S_{AB}[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}: 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + c = 0$

$3 - 2 + c = 0$

$c = -1$

$o_{AB}: x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu S úsečky AB napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce AB procházející bodem S.

6 6.1

$\overrightarrow{u_p} = (1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = (1; 1)$ F)

6.2

$\overrightarrow{u_q} = (1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (0; -1)$ resp. $\overrightarrow{n_q} = (0; 1)$ B)

6.3

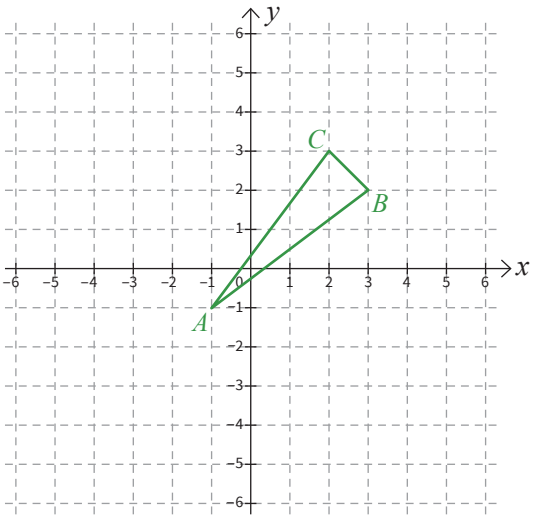
$\overrightarrow{u_r} = (1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_r} = (1; -1)$ E)

6.4

$\overrightarrow{u_s} = (0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_s} = (-1; 0)$ resp. $\overrightarrow{n_s} = (1; 0)$ A)

Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky q a s, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

7



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

8 $a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

9 $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{4\cdot 3+3\cdot 4}{5\cdot 5} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

10 $\overrightarrow{AC} = (1; 7) = \overrightarrow{s_{AC}}$

$\overrightarrow{n_{AC}} = (7; -1)$

$\leftrightarrow AC\colon 7\cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC\colon 7\cdot 1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

D) $7x - y - 5 = 0$

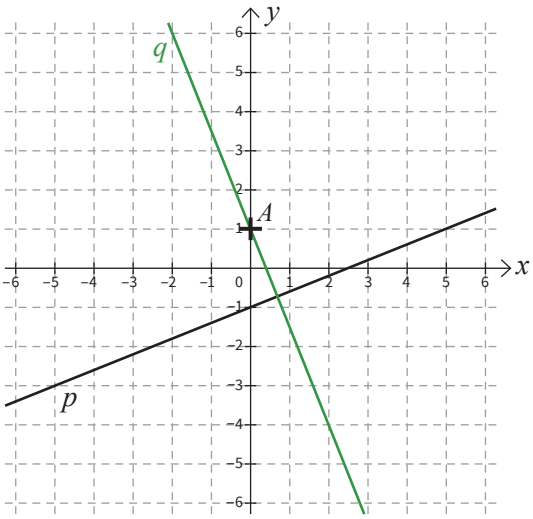
$\overrightarrow{BD} = (-7; 1) = \overrightarrow{s_{BD}}$

$\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 7)$

vyhovuje úhlopříčka AC

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku AC, nebo BD. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

11



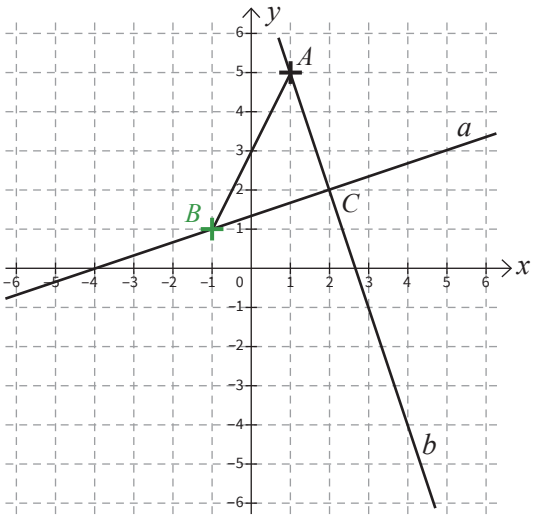
Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

$\overrightarrow{u_p} = (5; 2) = \overrightarrow{n_q} \Rightarrow q\colon 5x + 2y + c = 0$

$A \in q\colon 5\cdot 0 + 2\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$q\colon 5x + 2y - 2 = 0$

12



Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu B lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě C, poloměr CA je přenesen na přímku a. Z obrázku žák určí souřadnice bodu B. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky AB.

$B = [-1; 1] \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{u_c} = (2; 4)$

$\overrightarrow{n_c} = (4; -2) \Rightarrow c\colon 4x - 2y + c = 0 \qquad /:2$

$A \in c\colon 2\cdot 1 - 1\cdot 5 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$c\colon 2x - y + 3 = 0$

13 13.1
vektor $\overrightarrow{BA} = (2; 1)$

A N

13.2
vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$

A N

13.3
vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1) \Rightarrow 3\cdot AB = (-6; -3)$

A N

Žák může chybně počítat v úloze 14.1 se souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{AB}$ a ne vektoru $\overrightarrow{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy 14.2 a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy 14.1 V úloze 14.3 se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\overrightarrow{AB}$.

14 $B[0; 0], D[-3; 3], \Rightarrow \overrightarrow{BD} = (-3; 3)$

u_{BD}: $\quad x = -3t \quad$ resp. $\quad x = t$

$y = 3t; t \in \mathbb{R} \qquad y = -t; t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů B a D. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\overrightarrow{AC}$ a z normálového vektoru $\overrightarrow{AC}$ vypočítat směrový vektor.

15 $\overrightarrow{n_o} = \overrightarrow{AB} = (2; -4) \Rightarrow o: 2x - 4y + c = 0 \qquad /:2$

$S_{AB}[2; 0] \in o$: $1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

o: $x - 2y - 2 = 0$

$P_x[x; 0] \Rightarrow P_x = S_{AB}[2; 0]$

$P_y[0; y]$: $0 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_y[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou x a y jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

16 $\overrightarrow{n_p} = (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{u_p} = (3; 2)$

$\overrightarrow{u_q} = (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (3; 2)$

$\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{u_q} = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky p a parametrické rovnice přímky q žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

17 15.1
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ F)

15.2
$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$ C)

15.3
$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ A)

15.4
$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 Body A a B jsou osově souměrné podle osy $o \Rightarrow B[4; 3]$

$\overrightarrow{u_o} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; -3) \Rightarrow \leftrightarrow AB$: $2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$

$\leftrightarrow AB$: $2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

19 $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$

a: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a –2.
Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A[3; 0]$ a koncovým bodem $B[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

ŘEŠENÍ – KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

DVOJICE NEŘEŠENÝCH A ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ / NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1 200 čísel

2 6 týmů

3 $-2p^2 + 13p - 36$
Podmínky: $p \in \mathbb{N}, p \geq 8$

4 $P = \frac{1}{32}$

5 697 680 způsobů
$P = \frac{1}{45}$

6 16 bodů

7 8 dětí

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 **1. způsob –** s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**

Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

*U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály. Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**. Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.*

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=$

pro rozpis faktoriálu $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot 2\cdot 1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!}-\cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}}+\cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}+\frac{8!}{5!\cdot 3!}-\cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}+\cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1}=\binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2}=\binom{8}{6}$

$\binom{n}{0}=1$ proto platí: $\binom{8}{0}=1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\cancel{\binom{8}{1}}+\cancel{\binom{8}{2}}+\binom{8}{5}-\cancel{\binom{8}{6}}+\cancel{\binom{8}{7}}}{5!-3!}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)!}{(x-1)!}-2\cdot\frac{x!}{(x-2)!}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!}-\frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!}=$

$=(x+3)!\cdot(x+2)+(x+1)\cdot x-2x(x-1)=x^2+2x+3x+6+x^2+x-2x^2+2x=8x+6$

A) $8x+6$
B) $6x+6$
C) x^2+6
D) $20x-12$
E) $4x-7$

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou x. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$ A ■ N □

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$ A ■ N □

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \frac{20!}{17! \cdot (20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!}$

proto rovnost platí: $1140 = 1140$

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$ A ■ N □

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$ A □ N ■

platí: $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 = 22$

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi.
Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

4 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o **variace bez opakování**, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:

zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

$V(4,8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

A) 70
B) 6720
C) 126
D) 1680
E) 40

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici.
Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

5 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu.

Jedná se tedy o **kombinace bez opakování**.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2,6)\cdot K(1,6)=\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{1}=15\cdot 6=90$$

A) 315
B) 90
C) 36
D) 21
E) 220

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být jiný počet mužů a žen.

6 Jedná se o **kombinace bez opakování**.

6.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$$K(3,7)=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=35$$

6.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$$K(3,6)+K(3,9)=\binom{6}{3}+\binom{9}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}+\frac{9!}{3!\cdot 6!}=104$$

6.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$$K(3,9)+K(3,5)=\binom{9}{3}+\binom{5}{3}=\frac{9!}{3!\cdot 6!}+\frac{5!}{3!\cdot 2!}=94$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce.
Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích.
Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

A)	35	6.1	**A**
B)	104	6.2	**B**
C)	94	6.3	**C**
D)	840		
E)	1680		

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

7.1 Padne součet 5. A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Padne součet 7. A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 **Nepadne** součet 6. A □ N ■

Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti **opačného jevu C'**. Platí $P(C) = 1 - P(C')$.

Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 5$.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Padne součet 5 nebo 6 . A ■ N □

Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz. výše), pro součet 6 je $m = 5$ (viz. výše).

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

8 8.1 Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \%$$

8.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí. Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \%$$

8.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka. Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \%$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

A)	19 %	8.1	**D**
B)	36 %	8.2	**A**
C)	50 %	8.3	**C**
D)	57 %		
E)	68 %		

9 9.1 Závod dokončí Mercedes i Red Bull.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.
Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou **nezávislých jevů**,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 = 0{,}86$, proto 86 %

9.2 Ferrari **nedokončí** závod.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.
Pravděpodobnost, že Ferrari **nedokončí** závod, vypočítáme jako pravděpodobnost **jevu opačného**:

$P(B) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$, proto 19 %

9.3 Závod **nedokončí** ani McLaren, ani Renault.

Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. ⇒ že **nedokončí** závod je 0,24.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. ⇒ že **nedokončí** závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 = 0{,}06$, proto 6 %

9.4 Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86 a tudíž že ho **nedokončí** je 0,14. Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India:

$P(D) = 0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}12$, a to je 12 %

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

A)	75 %	9.1	C
B)	6 %	9.2	E
C)	86 %	9.3	B
D)	92 %	9.4	F
E)	19 %		
F)	12 %		

10 Víme, že **průměr** dosažených bodů je **78** (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.
Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.
Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmu:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{14} = 78 \qquad / \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1092$$
$$3x = 165 \qquad / : 3$$
$$x = 55$$

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

11 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky.

Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno. Pro medián platí, že soubor hodnot **musí být uspořádaný podle velikosti!**

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$), tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\tilde{X} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

Správné hodnoty jsou tedy:

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

Proto je správná **varianta D**.

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu. Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti. Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu. Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

12 **12.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen. To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:

$V'(6,8) = 8^6 = 262144$

12.2 $6! = 720$

ŘEŠENÍ – TEST 1

1 Vyjádříme všechna čísla jako zlomky se jmenovatelem 42, protože 42 je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 6, 7.

$-\frac{17}{6} = -\frac{119}{42}, -\frac{7}{3} = -\frac{98}{42}, \frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$

Do intervalu $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{105}{42}; \frac{28}{42}\right)$ tedy patří čísla $-\frac{98}{42} = -\frac{7}{3}$ a $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

$-\frac{7}{3} + \frac{2}{7} = -\frac{98}{42} + \frac{12}{42} = -\frac{86}{42} = -\frac{43}{21}$

Není vhodné převádět zlomky na desetinná čísla.
$-\frac{43}{21}$ případně lze vyjádřit jako smíšené číslo $-2\frac{1}{21}$.

2 Přímý úhel má velikost 180° nebo π radiánů. Tento vztah využijeme k vyjádření úhlu $\frac{7}{10}\pi$ radiánů ve stupňové míře.

$\frac{7}{10}\pi \text{ rad} = \frac{7}{10} \cdot 180° = 126°$

$\alpha = 180° - 126° = 54°$

$\alpha = 54°$

Druhá možnost řešení:
Vypočítáme nejprve velikost úhlu α v obloukové míře:
$\alpha = \left(\pi - \frac{7}{10}\pi\right) \text{rad} = \frac{3}{10}\pi \text{ rad}$
a výsledek převedeme na stupňovou míru: $\alpha = \frac{3}{10}\pi \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$.

3 **Dosazovací metodou** (využijeme toho, že v druhé rovnici je vyjádřena neznámá y, dosadíme za y do první rovnice, vyřešíme rovnici s jednou neznámou x):

$x = 2(2x + 7) + 4$

$x = 4x + 14 + 4$

$-3x = 18$

$x = -6$

Dosadíme do rovnice $y = 2x + 7$ hodnotu x a vypočítáme y: $y = 2 \cdot (-6) + 7 = -5$

$K = \{[-6; -5]\}$

Použili jsme jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, proto provádět zkoušku není nutné.
Bylo možné využít x vyjádřené z první rovnice pro dosazení do druhé rovnice:
$y = 2(2y + 4) + 7$, pak $y = -5$ a dopočítáme $x = -6$.
*Je možné použít též **sčítací metodu** (uspořádáme umístění neznámých v obou rovnicích, druhou rovnici vynásobíme dvěma a obě rovnice sečteme, vyřešíme rovnici s jedinou neznámou x):*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + y &= 7 \\ -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme $y = -5$.

4 Funkce $y = \cos x$ nabývá hodnoty –1 pro všechna $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

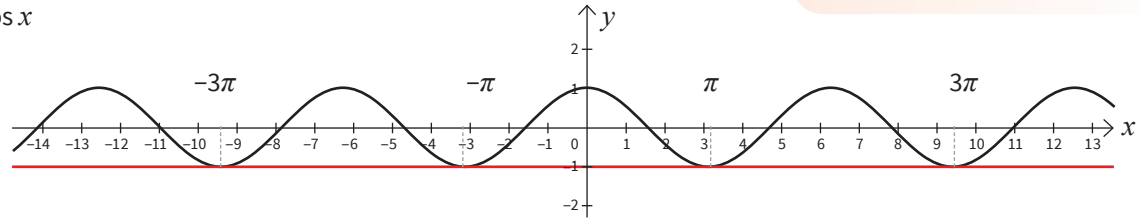
Použijeme substituci $x = \frac{\pi}{3} + t$; řešíme tedy rovnici $\frac{\pi}{3} + t = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z této rovnice vyjádříme $t = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hledáme řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$: pro $k = 0$ je $t = \frac{2\pi}{3}$ a pro žádné jiné celé číslo k nepatří t do intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

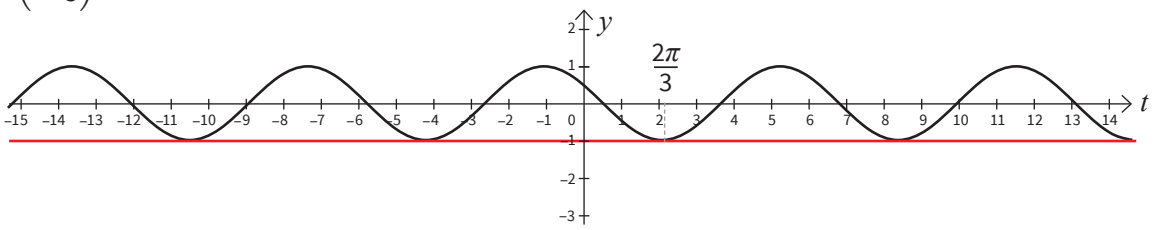
$t = \frac{2\pi}{3}$

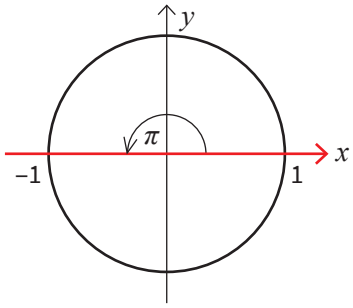
Lze ilustrovat na grafu funkce, případně na jednotkové kružnici.

$y = \cos x$



$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$



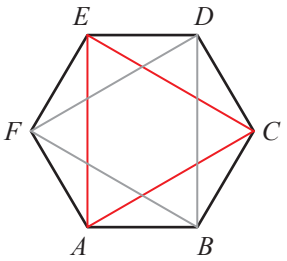


5 Pravděpodobnost náhodného jevu počítáme jako poměr počtu výsledků pokusu jevu příznivých m a počtu všech možných výsledků pokusu n. Náhodným pokusem se v tomto případě rozumí výběr tří vrcholů ze šesti vrcholů šestiúhelníku.

$n = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

Nezáleží na pořadí výběru vrcholů trojúhelníku.

Rovnostranný trojúhelník lze sestrojit právě dvěma způsoby (červený trojúhelník ACE a modrý trojúhelník FBD), $m = 2$.



Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

6 $\frac{1}{2} - 3x \geq -2 + x$

Od obou stran nerovnice odečteme x a $\frac{1}{2}$

$-4x \geq -2 - \frac{1}{2}$

$-4x \geq -\frac{5}{2}$

Obě strany nerovnice dělíme číslem −4

$x \leq x : (-4)$

$x \leq \frac{5}{8}$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší nebo rovna $\frac{5}{8}$,

tedy všechna čísla z intervalu $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Při dělení záporným číslem se obrací znak nerovnosti.

Mohli bychom postupovat i takto: K oběma stranám nerovnice přičteme výraz $3x + 2$, dostaneme nerovnici $\frac{1}{2} + 2 \geq x + 3x$, tedy $\frac{5}{2} \geq 4x$. Dělíme obě strany rovnice kladným číslem 4 (bez obracení znaku nerovnosti) a dostaneme $\frac{5}{8} \geq x$. Je nutno dát pozor na správné přečtení této nerovnosti – vyjadřuje pořád skutečnost, že x je ***menší nebo rovno*** *$\frac{5}{8}$, tedy $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.*

7 Mezi množstvím těsta a počtem rohlíčků je přímá úměrnost, tedy Katka bude potřebovat $240 \cdot \frac{90}{60}$ g těsta.
360 rozdělíme v poměru 4:2:5:5, na máslo připadá 90 g.

Katka bude potřebovat 90 g másla.

Dělení hmotnosti 360 g v daném poměru: $4 + 2 + 5 + 5 = 16$, $\frac{360}{16} \cdot 4\ g = 90\ g$.

Jiná možnost: Určíme nejdříve hmotnost másla při pečení 60 rohlíčků: $\frac{240}{16} \cdot 4\ g = 60\ g$. Proto pro 90 rohlíčků bude třeba 90 g másla.

8 V geometrické posloupnosti je podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů rovný kvocientu posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Tedy $\frac{a_2}{a_1} = q$ a také $\frac{a_3}{a_2} = q$, proto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Dosadíme $\left(a_1 = 2\sqrt{2}, a_2 = 4, a_3 = m\right)$:

$\frac{m}{4} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$

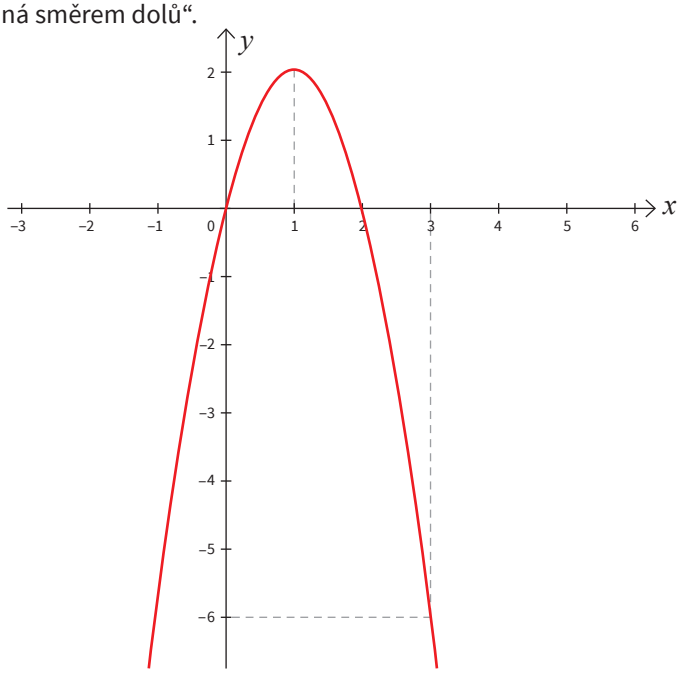
$\frac{m}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$m = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}}$

$m = 4\sqrt{2}$

Také jsme mohli z prvních dvou členů určit kvocient $q = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pak $\frac{m}{4} = \sqrt{2}$; $m = 4\sqrt{2}$.

9 Grafem každé kvadratické funkce je parabola. Protože funkce f nabývá maxima, bude jejím grafem parabola „otevřená směrem dolů“.



Ze souměrnosti paraboly podle její osy vyplývá, že $f(3) = f(-1)$. Úlohu pak lze řešit pomocí soustavy rovnic:
$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$
$f(3) = -6 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -6$
$f(-1) = -6 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$
(Dostaneme $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$)

Ze souměrnosti by bylo možné použít také vztah $f(2) = f(0)$.

Graf hledané funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy, proto $f(0) = 0$, a tedy $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, tedy $c = 0$.

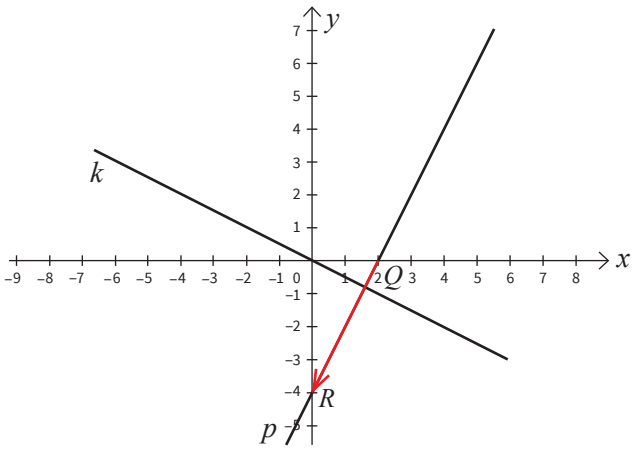
Kvadratická funkce nabývá svého maxima pro $x = -\frac{b}{2a}$, proto $-\frac{b}{2a} = 1$ … označíme (1).

Pro $x = 3$ nabývá hledaná funkce hodnotu −6, proto $-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ … označíme (2).

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme $a = -2$ a $b = 4$.

$a = -2$, $b = 4$, $c = 0$

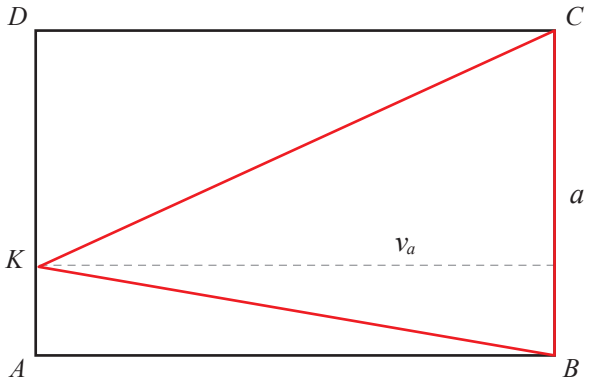
10 Hledáme obecnou rovnici přímky k ve tvaru k: $ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b v této rovnici jsou souřadnice normálového vektoru přímky k $\left(\vec{n}_k = (a; b)\right)$. Přímka k má být kolmá k přímce p, proto jejím normálovým vektorem je vektor $\vec{n}_k = R - Q$ (nebo jeho libovolný nenulový násobek).
Souřadnice vektoru $\vec{n}_k$ určíme jako rozdíl souřadnic bodů R a Q: $\vec{n}_k = R - Q = (-2; -4)$.



***Řešení užitím úsekového tvaru rovnice přímky** p. Využijeme toho, že přímka p je určena svými průsečíky se souřadnicovými osami: $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$, případně rovnici převedeme na směrnicový tvar $y = 2x - 4$. Vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek je $a' = -\frac{1}{a}$.*
Přímka k bude mít směrnici $-\frac{1}{2}$ a směrnicovou rovnici $y = -\frac{1}{2}x$. Po úpravě získáme obecnou rovnici $x + 2y = 0$.

Ze souřadnic směrového vektoru přímky p získáme $a = -2$ a $b = -4$, obecnou rovnici přímky k můžeme zapsat ve tvaru k: $-2x - 4y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c, k tomu využijeme údaj, že přímka k prochází počátkem souřadnicové soustavy $P[0; 0]$.
$P[0; 0] \in k \Rightarrow -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$
Získali jsme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $-2x - 4y = 0$, po vydělení −2 máme k: $x + 2y = 0$.

11 Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (v tomto případě $a = |BC|$ a v_a je vzdálenost bodu K od strany BC, tedy $v_a = |AB| = p$). Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku BCK, musíme znát délku strany BC a velikost výšky k této straně. Výpočty budeme provádět v centimetrech.



Všimněte si, že obsah trojúhelníku BCD nezávisí na umístění bodu K na úsečce AD, „posunutím" bodu K po úsečce AD se velikost výšky trojúhelníku BCK na základnu BC nezmění.

Označíme $v_a = |AB| = p$; $a = |BC| = p - 2$.

Jediné, co potřebujeme určit, je číslo p. K tomu využijeme údaj o obvodu obdélníku $ABCD$ a vzorec pro výpočet obvodu obdélníku.

$O = 2\left(|AB| + |BC|\right)$

$O = 2\left(p + (p-2)\right) = 2(2p-2) = 4p - 4$

Dosadíme $O = 48$:

$48 = 4p - 4$

Po vyřešení rovnice $p = 13$, potom $v_a = |AB| = 13$, $a = |BC| = p - 2 = 13 - 2 = 11$.

Nyní můžeme vypočítat obsah trojúhelníku BCK: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{11 \cdot 13}{2} = 71{,}5$.

Trojúhelník má obsah 71,5 cm².

12 $\sqrt{9a^4 + 16\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{9a^4 + 16a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

Připomeňte si, že $\sqrt{m^2} = |m|$. Pro $\sqrt{25a^4}$ bychom měli zapsat $\sqrt{25a^4} = |5a^2|$, ale víme, že $5a^2 \geq 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Tedy $|5a^2| = 5a^2$.

13 Označíme počet všech příkladů ve sbírce x. Pomocí proměnné x zapíšeme údaje z textu:

Při řešení slovní úlohy nezapomeňte zapsat, jaký význam má (co označuje) zvolená neznámá, a správně formulovat odpověď na položenou otázku.

Počet příkladů vyřešených do konce února … $\frac{x}{3}$

Počet zbývajících příkladů na konci února … $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

Počet příkladů vyřešených v březnu … $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$

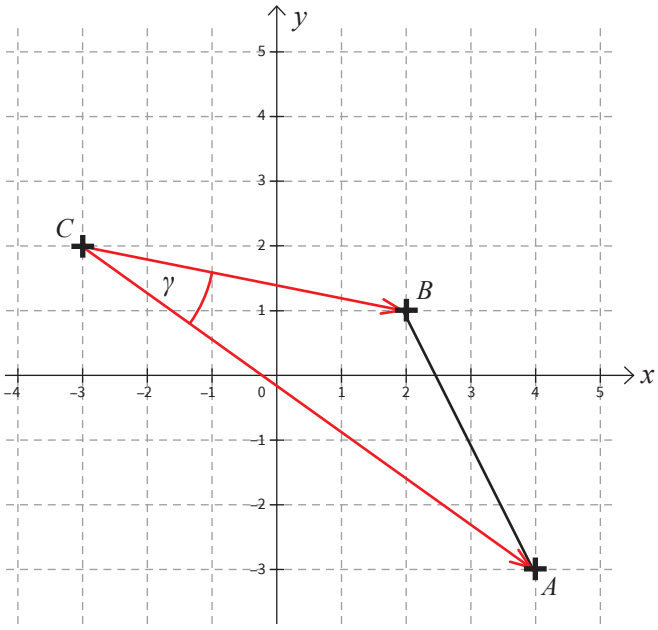
Počet příkladů vyřešených do konce března … $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x$. Na duben a květen tedy zbyla polovina všech příkladů, z ní jednu polovinu (tedy čtvrtinu z celkového počtu příkladů) vyřešila Ema v dubnu.

Sestavíme rovnici: $\frac{x}{4} = 54$, tedy $x = 216$.

Provedeme kontrolu správnosti: (v únoru $\frac{216}{3} = 72$ příkladů, v březnu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 36$ příkladů, v dubnu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 54$ příkladů, v květnu 54 příkladů, $72 + 36 + 54 + 54 = 216$).

Sbírka obsahovala 216 příkladů.

14 Vnitřní úhel u vrcholu C (v obrázku označen γ) je úhel sevřený vektory $\vec{u} = A - C$ a $\vec{v} = B - C$.



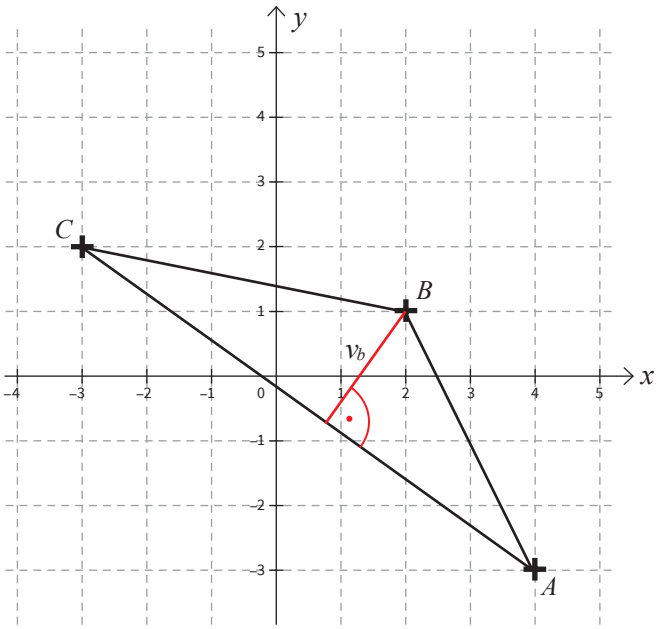
$\vec{u} = (7; -5)$, $\vec{v} = (5; -1)$

Použijeme vzorec pro výpočet úhlu dvou vektorů:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{35 + 5}{\sqrt{49 + 25} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$$

$\gamma = 24°14'$

Velikost výšky v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC.



Při výpočtu $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{40}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$

není vhodné poslední hodnotu zapisovat, ponecháme ji v paměti kalkulátoru a rovnou určíme γ. Je-li nutné ji zapsat (a přitom zaokrouhlit), je pro požadovanou přesnost nutné zaokrouhlit alespoň na 4 desetinná místa.

Pozn.: V analytické geometrii obvykle zapisujeme vzdálenosti bez konkrétních jednotek. V této úloze je tedy hledaná vzdálenost rovna 2,1 jednotek – rozumí se jednotky použité souřadnicové soustavy.

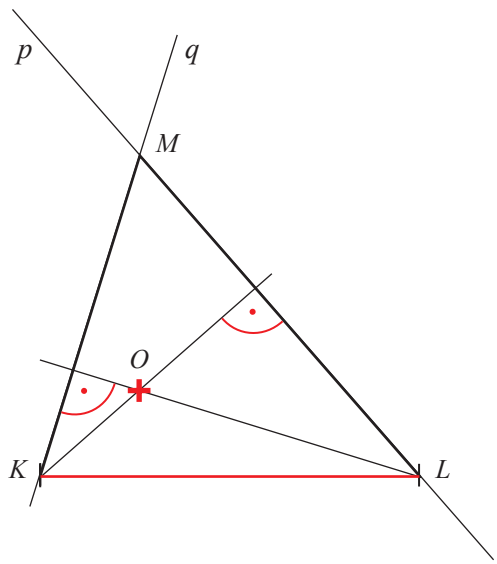
Směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{u} = A - C = (7;\ -5)$, přímka AC má tedy obecnou rovnici $5x + 7y + c = 0$, konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu A (případně C): $5\cdot 4 + 7\cdot(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 1$, tedy $\leftrightarrow AC$: $5x + 7y + 1 = 0$.

Použijeme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu B od přímky:

$$v_b = v\,(B, \leftrightarrow AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5\cdot 2 + 7\cdot 1 + 1|}{\sqrt{5^2+7^2}} = \frac{18}{\sqrt{74}} = \frac{18\sqrt{74}}{74} = \frac{9\sqrt{74}}{37} \doteq 2{,}1$$

Úhel při vrcholu C má velikost 24°14' a výška v_b má velikost přibližně 2,1 (jednotek).

15 Předpokládáme, že existuje požadovaný trojúhelník – načrtneme ho, vyznačíme zadané prvky.



Hledáme bod M:

$M \in p\ (p \perp\leftrightarrow KO \wedge L \in p)$
(čteme: M leží na přímce p, která je kolmá k přímce KO a prochází bodem L)

$M \in q\ (q \perp\leftrightarrow LO \wedge K \in p)$
(čteme: M leží na přímce q, která je kolmá k přímce LO a prochází bodem K)

Tedy $M \in p \cap q$

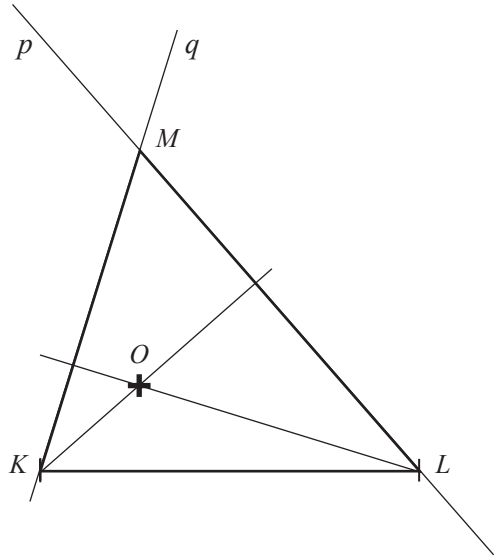
Provedeme konstrukci:

1.) $p; p \perp\leftrightarrow KO \wedge L \in p$

2.) $q; q \perp\leftrightarrow LO \wedge K \in p$

3.) $M; M \in p \cap q$

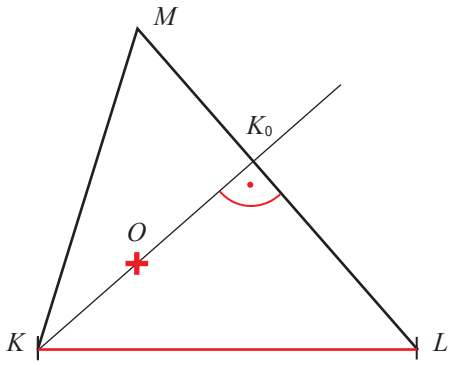
4.) ΔKLM

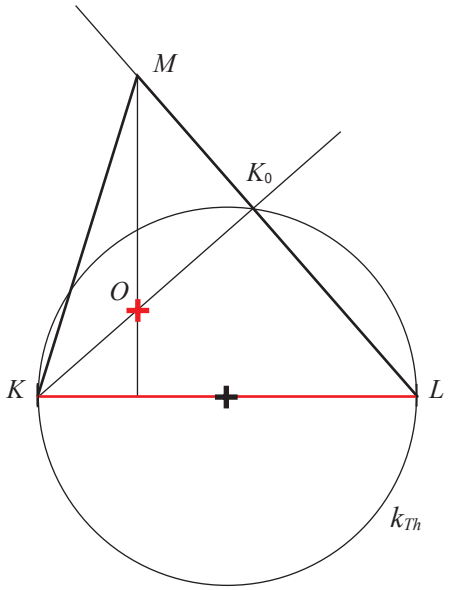


Úloha má v rovině jedno řešení.

Jiný způsob řešení:

Trojúhelník načrtneme, pojmenujeme patu výšky K_0.





Rozbor úlohy:

Neznámé body jsou K_0 a M.

Určíme nejprve bod K_0:

- K_0 je pata výšky z vrcholu K, musí ležet na polopřímce KO … $K_0 \in\rightarrow KO$
- Úhel u K_0 je pravý, bod K_0 musí ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou KL … $K_0 \in k_{Th}(KL)$
- $K_0 \in\rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$

Dále hledáme bod M:

- M leží na kolmici p vedené bodem O k úsečce KL (její částí je výška v_m)
- M leží na polopřímce LK_0
- $M \in\rightarrow p \cap\rightarrow LK_0$

Provedeme konstrukci:

1.) $\rightarrow KO$

2.) $k_{Th}(KL)$

3.) $K_0; K_0 \in \rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$

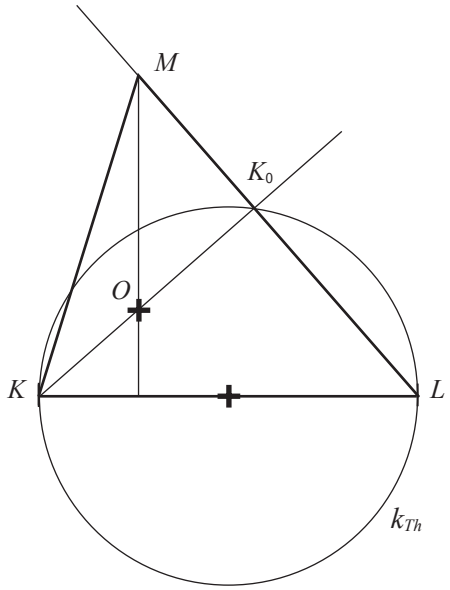
4.) $p; O \in p, p \perp KL$

5.) $\rightarrow LK_0$

6.) $M; M \in p \cap \rightarrow LK_0$

7.) ΔKLM

Úloha má v rovině jedno řešení.



Náčrt provádíme tužkou „od ruky“. Je dobře barevně vyznačit známé prvky. Konstrukci provádíme pečlivě – ořezanou tužkou, použijeme pravítko, kružítko s ořezanou tuhou, případně úhloměr.
Poznámka: V „ostrých“ maturitních testech je nutné v záznamovém archu všechny čáry obtáhnout propisovací tužkou – záznamové archy se pro účely opravování skenují a na naskenovaném obrázku není obyčejná tužka dobře viditelná.

16 Pro dláždění dna bazénu bude potřeba 450 : 30 = 15 dlaždic v jedné řadě (podél delší stěny bazénu).

Stejných takových řad je nutno položit 300 : 30 = 10.

Na vydláždění dna bazénu je potřeba 15 · 10 = 150 dlaždic.

Pro dláždění kratší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 300 : 30 = 10 dlaždic.

Na vydláždění obou kratších stěn potřebujeme 2 · 4 · 10 = 80 dlaždic.

Pro dláždění delší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 450 : 30 = 15 dlaždic.

Na vydláždění obou delších stěn potřebujeme 2 · 4 · 15 = 120 dlaždic.
Pro celý bazén potřebujeme 150 + 80 + 120 = 350 dlaždic.

Počet balení získáme vydělením celkové spotřeby dlaždic počtem dlaždic v jednom balení 350 : 12 = 29,2, zaokrouhlíme nahoru na 30.

D)

Můžeme řešit i tak, že vypočítáme obsah dna a stěn bazénu v cm^2 a tento vydělíme obsahem jedné dlaždice.
$S = (450 \cdot 300) + 2 \cdot (300 \cdot 120) + 2 \cdot (450 \cdot 120) = 3\ 15000$
$350 : (30 \cdot 30) = 350$
Při tomto způsobu výpočtu je potřeba dát pozor na to, jestli dlaždice nebude nutné řezat, tedy jestli všechny rozměry dlážděných obdélníků jsou celočíselnými násobky délky strany čtvercové dlaždice.

17 Předpis A zadává lineární funkci, jejím grafem je přímka – možnost A vyloučíme.

Předpis B zadává kvadratickou funkci, jejím grafem je parabola – možnost B vyloučíme.

Předpis C zadává exponenciální funkci, která nikdy nenabývá záporných hodnot, žádná část jejího grafu nemůže ležet pod souřadnicovou osou x – možnost C vyloučíme.

Předpis E zadává lineární lomenou funkci, jejím grafem je hyperbola (se dvěma větvemi), navíc $f(0) = (0+1)^{-1} = 1 \neq 0$, možnost E vyloučíme.

Zbývá možnost D), pro jistotu ještě ověříme:

$f: y = \log_2(x+1)$

je definována pro $x+1>0$, tedy pro $x>-1$, odpovídá funkci na obrázku

$x=0 \Rightarrow y=\log_2 1=0$, odpovídá funkci na obrázku

$x=1 \Rightarrow y=\log_2 2=1$, odpovídá funkci na obrázku

$x=3 \Rightarrow y=\log_2 4=2$, odpovídá funkci na obrázku

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\log_2\frac{1}{2}=-1$, odpovídá funkci na obrázku

18 Rovnice A) a C) mají záporný diskriminant, nemají žádný reálný kořen. Zbývá otestovat rovnice B) a D). Můžeme to udělat dvěma způsoby:

1.) Dosadíme číslo a do výrazu na levé straně rovnice:

$$L_B(a)=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)-2=1+2\sqrt{3}+3+2+2\sqrt{3}-2=4+4\sqrt{3}\neq 0$$

$$L_D(a)=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)-2=1+2\sqrt{3}+3-2-2\sqrt{3}-2=0$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

2.) Řešíme rovnice B) a D) užitím diskriminantu:

$$D_B=4+8=12,\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}\neq a$$

$$D_D=4+8=12,\ x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

Vzorec pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ je $D=b^2-4ac$.

Je-li D kladné, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

19 Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy je nutné splnit podmínku

$\frac{x-3}{x}\geq 0$.

Navíc číslo ve jmenovateli zlomku musí být různé od nuly, tedy $x\neq 0$.

Nerovnici $\frac{x-3}{x}\geq 0$ budeme řešit pomocí nulových bodů ($x_{01}=0$, $x_{02}=3$)

a tabulky pro znaménka čitatele a jmenovatele.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3\rangle$	$\langle 3; -\infty\rangle$
x	–	+	+
$x-3$	–	–	+
$\frac{x-3}{x}$	+	–	+

Definiční oborem funkce je sjednocení intervalů $(-\infty; 0)\cup\langle 3; \infty)$.

C)

Jiný způsob řešení nerovnice $\frac{x-3}{x}\geq 0$:
Po stanovení podmínek ($x\neq 0$) můžeme obě strany nerovnice násobit číslem x^2, které je jistě větší než nula, znak nerovnosti se zachová. Získáme nerovnici $(x-3)\cdot x\geq 0$, kterou umíme vyřešit užitím grafu kvadratické funkce $f: y=(x-3)\cdot x$, tedy kvadratické funkce $f: y=x^2-3x$.
Víme, že grafem je parabola „otevřená nahoru“ a protínající osu x v bodech 0 a 3, odtud $x\in(-\infty; 0\rangle\cup\langle\infty; 0)$, po přihlédnutí k podmínkám $x\in(-\infty; 0)\cup\langle 3; \infty)$.

20 Ze vztahu $m = \frac{t}{a+b}$ chceme vyjádřit neznámou a.

$m = \frac{t}{a+b} \qquad / \cdot (a+b)$

$m(a+b) = t$

$ma + mb = t \qquad / -mb$

$ma = t - mb \qquad / : m$

$a = \frac{t - mb}{m}$

B)

Podmínka $a \neq -b$ pro existenci výrazu je splněna automaticky, protože se jedná o kladná čísla a a b, stejně tak podmínka $m \neq 0$.

21 Určíme, kolikrát nejvýše mohl být Mirek v posilovně. Průměrně 6 návštěv na každého z 6 kamarádů znamená, že dohromady vykonali 36 návštěv. Mirkovi z nich by připadl největší počet návštěv tehdy, když počet návštěv všech ostatních kamarádů bude co nejmenší. Protože má každý jiný počet návštěv, budou počty návštěv posilovny pro jednotlivé kamarády vyjádřeny nejmenšími přirozenými čísly: 1; 2; 3; 4; 5. Všichni kromě Mirka společně vykonali alespoň 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 návštěv, Mirek mohl vykonat maximálně 36 − 15 = 21 návštěv a utratit tak maximálně 2 100 Kč.

A)

22 Počty uběhnutých kilometrů v jednotlivých dnech tvoří aritmetickou posloupnost (každý den navyšuje o stejnou vzdálenost), jejíž první člen je $a_1 = 3$ a šestnáctý člen $a_{16} = 6$. Diference je rovna délce jednoho oválu a vypočítáme ji ze vztahu pro n-tý (šestnáctý) člen aritmetické posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $a_{16} = a_1 + 15d$.

Dosadíme: $6 = 3 + 15d$ a vypočítáme diferenci $d = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (km).

Potřebujeme sečíst prvních 31 členů této posloupnosti, použijeme vzorec pro součet prvních n členů

$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$, tedy $s_{31} = (a_1 + a_{31}) \cdot \frac{31}{2}$. Chybí nám člen a_{31} - vypočítáme ho podle již použitého vzorce pro n-tý člen

$a_{31} = a_1 + 30d = 3 + 30 \cdot \frac{1}{5} = 9.$

$s_{31} = (3 + 9) \cdot \frac{31}{2} = 186$

Pan Rychlý naběhal během března 186 kilometrů.

E)

23 Upravíme výraz V: $V = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2} = \frac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{x+3}{2x+2}$

B)

Čitatel rozložíme užitím Vietových vzorců. Pro kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ platí $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Snadno uhádneme (a ověříme), že $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, a proto lze trojčlen $x^2 + 2x - 3$ rozložit na součin $(x+3)(x-1)$.

24 Provedeme konstrukci:

24.1 Žádná mocnina čísla 9 není rovna 0, rovnice I. nemá vůbec žádné řešení. A N

24.2 $|x-5| = 4 \Rightarrow x-5 = 4 \vee x-5 = -4 \Rightarrow x = 9 \vee x = 1$. A N

Rovnice II. má dvě řešení, ani jedno z nich není záporné.

24.3 $\sqrt{x+6} = 2 \Rightarrow x+6 = 4 \Rightarrow x = -2$. Kořen −2 je nutno ověřit zkouškou: $\sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2$. A N

Rovnice III. má jeden záporný kořen.

24.4 $5 = (x-1)^2 - x(x+3) \Rightarrow 5 = x^2 - 2x + 1 - x^2 - 3x \Rightarrow 5 = -5x + 1 \Rightarrow 4 = -5x \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$. A N

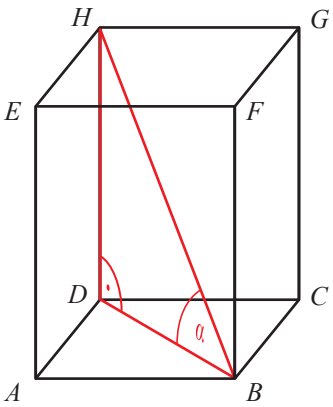
Rovnice IV. má jeden záporný kořen.

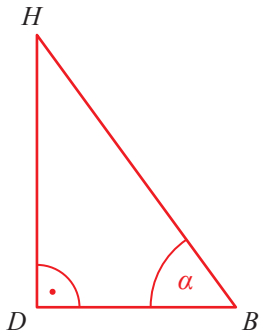
25 25.1 Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku BHD (s pravým úhlem při vrcholu D).

Označíme $\alpha = \measuredangle BHD$.

$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

B)

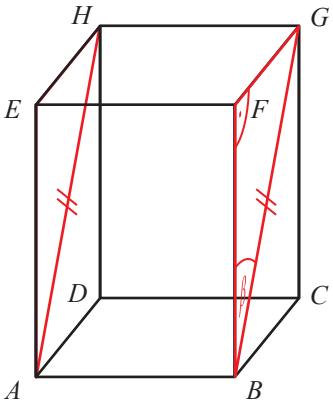


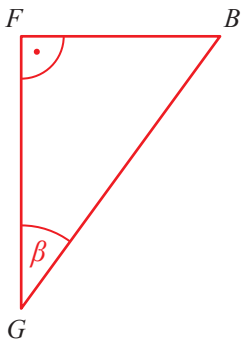


25.2 Odchylka mimoběžek $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow AH$ je rovna velikosti úhlu FBG, protože přímka BF je rovnoběžná s přímkou AH. Označíme $\beta = \measuredangle FBG$ a kosinus vypočteme užitím pravoúhlého trojúhelníku BGF.

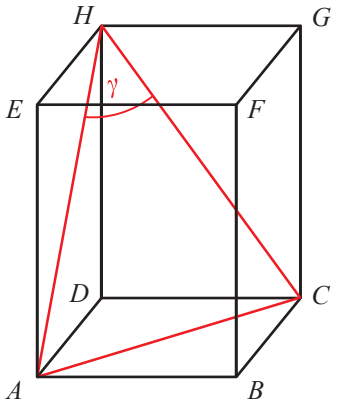
$$\cos\beta = \frac{|BF|}{|BG|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

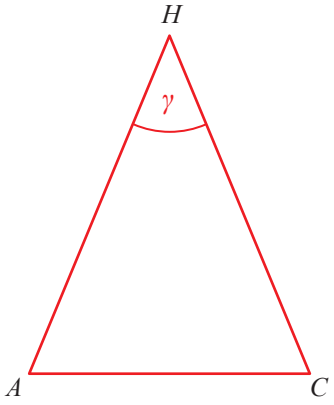
E)





25.3 Velikost úhlu $\gamma = \measuredangle AHC$ bychom počítali z rovnoramenného trojúhelníku ACH s hlavním vrcholem H.





Protože je požadován kosinus úhlu γ, použijeme kosinovou větu:

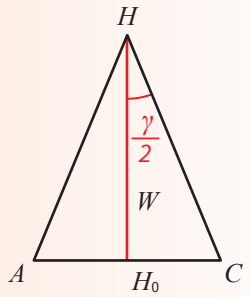
$|AC|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2 \cos\gamma$,

po dosazení $8 = 40 - 40 \cdot \cos\gamma$, tedy $\cos\gamma = \frac{4}{5}$

A)

*V části 3 je třeba si uvědomit, že trojúhelník ACH **není pravoúhlý**, nelze proto použít definici kosinu jako poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku.*

V úloze III. bychom samozřejmě mohli rovnoramenný trojúhelník ACH rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, pomocí nichž lze vypočítat velikost úhlu $\frac{\gamma}{2}$.



Tento výpočet je podstatně náročnější a nevede přímo k požadovanému kosinu, proto ho zde nebudeme uvádět.

26 26.1 $8a - 2a^3 \geq 0$

$8a - 2a^3 = a(8 - 2a^2) = 2a(4 - a^2) = 2a(2 - a)(2 + a)$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	$(2; \infty)$
$2a$	–	–	+	+
$2 - a$	+	+	+	–
$2 + a$	–	+	+	+
$2a(2 - a)(2 + a)$	+	–	+	–

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$

B)

Výraz rozložíme na součin užitím vzorců, určíme nulové body a posoudíme znaménko výrazu v intervalech mezi nulovými body. Krajní body příslušných intervalů zahrneme do hledané množiny, pokud je v tomto bodě výraz definován.

26.2 $\underbrace{(a^2+1)}_{\text{vždy kladné}} \cdot (a^2+a-2) \geq 0$

$a^2+a-2 \geq 0$

$(a+2)(a-1) \geq 0$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$a+2$	–	+	+
$a-1$	–	–	+
$(a+2)(a-1)$	+	–	+

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

E)

26.3 $-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \geq 0$

$-a^2 - 2a - 2 \geq 0 \qquad /:(-1)$

$a^2 + 2a + 2 \leq 0$

$$\frac{-1}{2a^2-a-1} \geq 0$$

$$\frac{-1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \geq 0$$

$$\frac{1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Připomeňte si vzorce pro rozklad výrazů na součin:

- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A-B)(A^2-AB+B^2)$

Pozor u B: Výraz $1 + 2a + 4a^2$ není druhá mocnina dvojčlenu $\left((1+2a)^2 = 1 + 4a + 4a^2\right)$.

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; 1)$	$(1; \infty)$
$a-1$	–	–	+
$a+\frac{1}{2}$	–	+	+
$(a-2)(a+1)$	+	–	+

$a \in (-\frac{1}{2}; 1)$

F)

26.4 $\frac{a^2-4}{-1} \geq 0$

$4 - a^2 \geq 0$

$(2-a)(2+a) \geq 0$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2-a$	+	+	–
$2+a$	–	+	+
$(2-a)(2+a)$	–	+	–

$a \in \langle -2; 2\rangle$

C)

ŘEŠENÍ – TEST 2

1 $y = \frac{3}{5}x$

$x - y = 5,6$

$x - \frac{3}{5}x = 5,6$

$\frac{2}{5}x = 5,6$

$x = 5,6 \cdot \frac{2}{5} = 14$

$y = \frac{3}{5} \cdot 14 = \frac{42}{5} = 8,4$

$\mathbf{y = 8,4}$

Zapíšeme údaje z úlohy. Soustavu rovnic vyřešíme dosazovací metodou.

2 $0,2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$

$0,2 \cdot 10^{4x-7} = 200$

$10^{4x-7} = \frac{200}{0,2}$

$10^{4x-7} = 1000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$\mathbf{x = \frac{5}{2}}$

Zk.:

$L\left(\frac{5}{2}\right) = 0,2 \cdot 10^{4 \cdot \frac{5}{2} - 7} - 200 = 0,2 \cdot 10^3 - 200 = 200 - 200 = 0$

$P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$

Lze použít substituci $t = 4x - 7$ a řešit rovnici $0,2 \cdot 10^t - 200 = 0$. Dostaneme $10^t = 1000$, $t = 3$ a po dosazení zpět do rovnice substituce $3 = 4x - 7$, tedy $x = \frac{5}{2}$.

Zkouška v tomto případě není nutnou součástí řešení, žádnou z užitých úprav jsme nemohli ztratit žádný kořen ani získat žádný navíc. Pokud by nám zkouška „nevyšla“, je nutno v řešení hledat (vlastní) chybu.

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0'$

$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

$-k + 28 = 0$

$\mathbf{k = 28}$

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule. Dále počítáme podle definice.

4 $112 \cdot 0,75 = 84$

$84 \cdot \frac{2}{3} = 56$

Vykvetlo **56** červených tulipánů.

Vypočítáme počet všech vykvetlých tulipánů. Z počtu kvetoucích připadají na červené dvě třetiny.

5 $s_8 = (a_1 + a_8) \cdot \frac{8}{2}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_8 = 11 + 28 = 39$

$s_8 = (11 + 39) \cdot 4 = 200$

V hledišti divadla je **200 sedadel**.

Počty sedadel v řadách tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$, její první člen je roven $a_1 = 11$. Počet členů posloupnosti je 8. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti - $a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Neznáme osmý člen a_8, vypočteme ho podle vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n + 1)$ a dosadíme do vzorce pro součet.

6 $m = xy + 2(x + y)k$

$m = xy + 2xk + 2yk$

$m - 2yk = xy + 2xk$

$m - 2yk = x(y + 2k)$

$\frac{m - 2yk}{y + 2k} = x$

Z daného vzorce chceme vyjádřit veličinu x. Nejprve je nutné roznásobit závorku. Členy, které obsahují požadovanou veličinu, ponecháme na jedné straně rovnice, ostatní „převedeme“ na druhou stranu rovnice. (Odečteme od obou stran rovnice výraz $2yk$.)
Vytkneme požadovanou veličinu. Obě strany rovnice vydělíme výrazem v závorce. (Protože se jedná o kladné veličiny, výraz nikdy nebude roven 0, můžeme dělit bez jakýchkoli omezení).

7 $x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}; D \in R / \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

$\frac{2x - 1}{3x - 1} = \frac{2x}{3x + 1}$

$(2x - 1)(3x + 1) = 2x(3x - 1)$

$6x^2 - 3x + 2x = 6x^2 - 2x$

$x = 1$

$1 \in D$

$K = \{1\}$

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem obou jmenovatelů (úprava je ekvivalentní v definičním oboru rovnice). Pokud bychom na začátku podmínky nenapsali a rovnici řešili v R, není jisté, že nenásobíme nulou a na konci bychom museli udělat zkoušku. Vypočítáme $x = 1$.
Kořen vyhovuje stanoveným podmínkám, proto může být řešením rovnice. Bez podmínek na začátku by bylo nutné provést zkoušku:

$L(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(1) = P(1) \Rightarrow 1 \in K$

8 $p' = 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 0{,}6375$ (procent)

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}6375}{100}\right)^5 = 25807$$

Banka by vyplatila **25807 Kč**.

Vypočítáme reálnou („čistou“) úrokovou míru p', tedy úrok po odečtení 15% daně.
Částka na účtu vzrůstá pravidelně každý rok o stálý počet procent p' – použijeme vzorec pro pravidelný růst veličiny V:

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5$$

9 x ... počet dívek ve třídě 4C

$2x$ ... počet chlapců ve třídě 4C

$x + 2x$ ... počet všech žáků třídy 4C

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{3x}{2}} = 0{,}1$$

$$\frac{x(x-1)}{3x(3x-1)} = 0{,}1$$

$$\frac{x-1}{3(3x-1)} = 0{,}1$$

$x - 1 = 0{,}3(3x - 1)$

$10x - 10 = 9x - 3$

$\mathbf{x = 7}$

Zkontrolujeme správnost úvah a výpočtu podle textu úlohy:

Ve třídě je 7 dívek a 14 chlapců, vypočítáme pravděpodobnost, že v náhodně vybrané dvojici budou jen dívky:

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{21}{210} = 0{,}1 \text{ (vyhovuje zadání).}$$

Ve třídě je **7 dívek**.

Označíme počet dívek ve třídě proměnnou x, pomocí ní vyjádříme i další údaje.

Vyjádříme pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvojice osob je složená jen z dívek. Jmenovatel zlomku vyjadřuje počet všech způsobů, jak vybrat dvojici osob ze třídy, ve které je x dívek a $2x$ chlapců, celkem $3x$ žáků (tvoříme neuspořádané dvojice z $3x$ žáků, tedy dvojčlenné kombinace z $3x$ prvků), těch je $\binom{3x}{2}$.

V čitateli je počet možností, jak dvojici vytvořit jen z dívek $\binom{x}{2}$.

Vypočítáme kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vyřešíme rovnici.

10 $\sin\alpha = \frac{u}{a} = \frac{7}{11}$

$\boldsymbol{\alpha = 39° \, 31'}$

$o = 2(a + b)$ $(b = |BC| = |AD|)$

$a^2 = u^2 + b^2$

$b^2 = a^2 - u^2 = (121 - 49)\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2$

$b = \sqrt{72}\text{ cm} = 6\sqrt{2}\text{ cm}$

$o = 2(11 + 6\sqrt{2})\text{ cm} \doteq \mathbf{39{,}0\text{ cm}}$

Úhel α má velikost 39° 31´, obvod kosodélníku je 39,0 cm.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme sinus úhlu α. K určení α použijeme kalkulačku (tlačítko většinou označeno $\sin^{-1}$ nebo arcsin podle typu kalkulátoru). K výpočtu obvodu je nutné vypočítat délku strany AD, můžeme využít Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

Pozor na správné zaokrouhlení výsledku 38,97na jedno desetinné místo.

11 $x \neq 2; D \in R / \{2\}$

$$\frac{x}{x-2} \leq 1$$

$$\frac{x}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{2}{x-2} \leq 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

$$\boldsymbol{K = (-\infty; 2)}$$

Nerovnice má neznámou ve jmenovateli, je nutné zapsat definiční obor nerovnice. Nerovnici převedeme na podílový tvar s nulou na pravé straně nerovnice – od obou stran nerovnice odečteme jedničku, pak výrazy na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel. Čitatel získaného zlomku je kladný - aby zlomek mohl být menší nebo roven nule, musí jmenovatel zlomku být záporný.

Pozor *– ve snaze zbavit se zlomku není možné v R násobit nerovnici jmenovatelem – nevíme, zda výraz $x - 2$ není záporný.*

12 $$\left(3a - \frac{6a-1}{3a}\right) \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2 - (6a-1)}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$

$$= \frac{9a^2 - 6a + 1}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{(3a-1)^2}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3a-1}{3a}}$$

Podmínky: $a \neq 0; a \neq \frac{1}{3}$

Závorka určuje prioritu operací – výrazy v závorce převedeme na společný jmenovatel. V čitateli prvního zlomku odstraníme závorku a podle vzorce $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu. Závorkou $(3a - 1)$ zkrátíme a zapíšeme výsledek.
Pozor *– dále krátit nelze, v čitateli je rozdíl, nikoli součin. Jmenovatel žádného zlomku nesmí být roven nule, tedy $3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ a $3a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{3}$*

13 $|3x - 2| = x + 6$

$3x - 2 \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{3} \iff x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$, $3x - 2 < 0 \iff x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

1. pro x z intervalu $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$$|3x - 2| = -(3x - 2) = -3x + 2$$
$$-3x + 2 = x + 6$$
$$-4x = 4$$
$$x = -1$$

$$-1 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right), K_1 = \{-1\}$$

2. V $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$:

$$|3x - 2| = 3x - 2$$
$$3x - 2 = x + 6$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

$$4 \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right), K_2 = \{4\}$$

$$\boldsymbol{K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 4\}}$$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu v rovnici, použijeme definici absolutní hodnoty reálného čísla ($a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$). Řešení rovnice rozdělíme do dvou intervalů podle znaménka argumentu („vnitřku“) absolutní hodnoty. Řešíme dvě lineární rovnice již bez absolutní hodnoty. Je nutné se přesvědčit, zda vypočtený kořen patří do intervalu, v němž právě řešíme. Množinu kořenů v R dostaneme jako sjednocení množin kořenů v jednotlivých intervalech. Pozn.: Abychom získali dva intervaly, na nichž všechny kroky provádíme, hledáme vlastně nulové body výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

14 x ... počet hodin, který potřebuje pan Novák na posekání celé zahrady

y ... počet hodin, který potřebuje paní Nováková k posekání celé zahrady

Za jednu hodinu poseká pan Novák $\frac{1}{x}$ a paní Nováková $\frac{1}{y}$ zahrady.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$3 \cdot \frac{1}{x} = 4 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{(4 \cdot \frac{1}{y})}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{3y}$$

$$\frac{4}{3y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{3y} = \frac{1}{12}$$

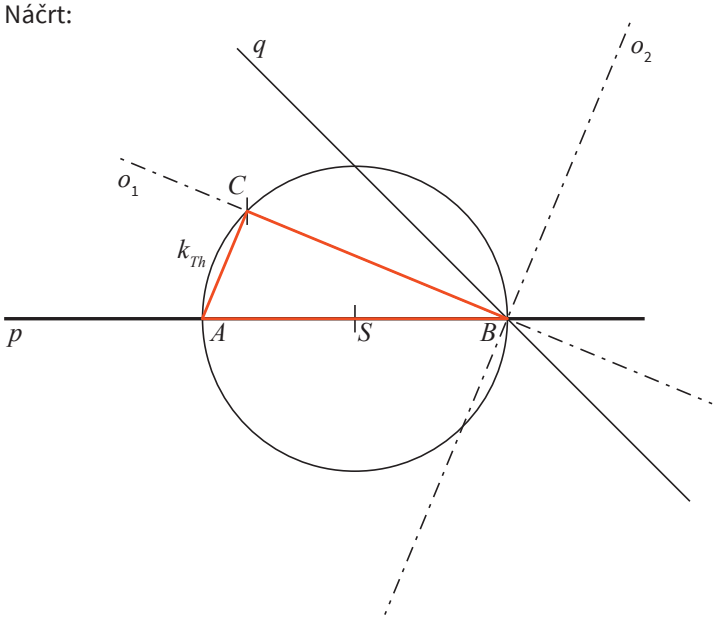
$y = 28$ (hodin)

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{3 \cdot 28} = \frac{1}{21}$$

$x = 21$ (hodin)

Označíme neznámé veličiny v úloze.
Sestavíme rovnice z údajů v úloze:
Budou-li pan a paní Novákovi pracovat společně jednu hodinu, posekají dohromady $\frac{1}{12}$ zahrady.
Druhá rovnice vyjadřuje rovnost posekané plochy paní Novákovou za 4 a panem Novákem za 3 hodiny.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou, z druhé rovnice stačí vyjádřit výraz $\frac{1}{x}$ a dosadit do první.
Vypočítáme y, pak $\frac{1}{x}$ a odtud x.
Zkontrolujeme, zda vypočtené hodnoty odpovídají textu úlohy – paní Nováková poseká zahradu za 28 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{28}$ zahrady a za 4 hodiny $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ zahrady.
Pan Novák poseká zahradu za 21 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{21}$ zahrady a za 3 hodiny $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ zahrady.
Budou-li pracovat společně, posekají za 1 hodinu $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{4+3}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{12}$ zahrady.
Nezapomeňte na slovní odpověď.

15 Náčrt:



Bod C má mít stejnou vzdálenost od dvou přímek p a q. Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek, jsou dvě přímky, na nichž leží osy úhlů sevřených těmito různoběžkami (obě přímky procházejí průsečíkem daných různoběžek a jsou na sebe kolmé).

Trojúhelník ABC má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C – proto musí bod C ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB.

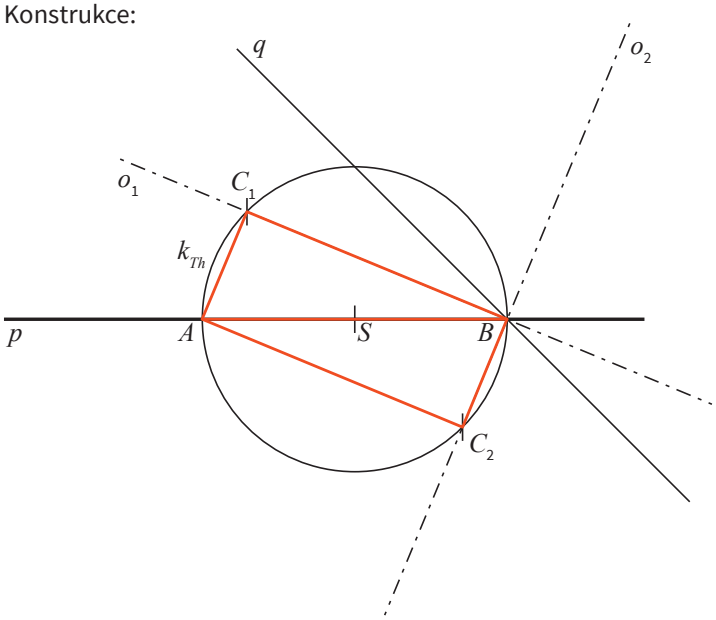
Rozbor:

$|Cp| = |Cq| \Rightarrow C \in o_1 \cup o_2$

$|\measuredangle ABC| = 90° \Rightarrow C \in k_{Th}(AB)$

$C \in k_{Th}(AB) \cap (o_1 \cup o_2)$

Konstrukce:



Pozor – střed úsečky určíme konstrukčně pomocí dvou kružnic se stejnými poloměry a středy v bodech A a B.

Popis konstrukce:

1. S; S je střed AB
2. k_{Th}; $k_{Th}\left(S; r = \frac{r}{2}\right)$
3. o_1, o_2; o_1, o_2 jsou osy úhlů sevřených přímkami p a q
4. C_1; $C_1 \in o_1 \cap k_{Th}$
5. C_2; $C_2 \in o_2 \cap k_{Th}$
6. $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$

Úloha má dvě řešení.

16 $2x - a = 0$

$x = \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = -2$

$a = -4$ D)

Zapíšeme podmínky pro existenci výrazu v předpisu funkce f:

$2x - a \neq 0$, tedy $x \neq \frac{a}{2}$.

Z uvedeného definičního oboru plyne $x \neq -2$. Porovnáme obě podmínky, tedy

$\frac{a}{2} = -2$ a zároveň $a = -4$.

17 $q: y = \frac{2}{3}x + b$

$M \in q \Rightarrow -1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$

$q: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$q: \frac{2}{3}x - y - \frac{7}{3} = 0$

q: $2x - 3y - 7 = 0$

Odpověď B

Přímka p je dána směrnicovou rovnicí, směrnice přímky p je rovna $\frac{2}{3}$.

Rovnoběžné přímky mají stejné směrnice, proto i směrnice hledané přímky q bude rovna $\frac{2}{3}$. Přímka q bude tedy mít rovnici

$q: y = \frac{2}{3}x + b$.

Koeficient b určíme využitím souřadnic bodu M, který má na přímce q ležet, jeho souřadnice musí tedy vyhovovat rovnici přímky q.
Získali jsme směrnicovou rovnici přímky q, převedením rovnice na anulovaný tvar dostaneme obecnou rovnici přímky q.
Vynásobením obou stran rovnice třemi získáme všechny koeficienty celočíselné.

18 $a = 45$ cm, $b = 25$ cm, $v = 25$ cm, $V_1 = 18$ l $= 18$ dm$^3 = 18000$ cm^3

$V_1 = a \cdot b \cdot v_1$

18000 cm^3 = 45 cm · 25 cm · v_1

$v_1 = \frac{18000}{45 \cdot 25}$ cm = 16 cm

$v - v_1 = 25$ cm $- 16$ cm = **9 cm**

Odpověď B

Voda po nalití do akvária bude mít tvar kvádru s rozměry a, b, v_1. Dosazením do vzorce pro objem kvádru zjistíme neznámý třetí rozměr kvádru v_1.
Před dosazením vyjádříme objem v cm^3 podle vztahu 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.
Vypočítáme vzdálenost vodní hladiny od horního okraje akvária.

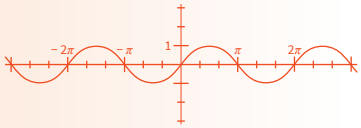
19 **$A = 2$**

$B = 3$

$C = -1$

Odpověď E

Graf funkce f: $y = A \cdot \sin(Bx) + D$ sestrojíme modifikací grafu funkce $y = \sin x$.



Konstanty A a B ovlivňují „tvar“ křivky.
A určuje amplitudu – „roztažení“ ve svislém směru, pro funkci f $A = 2$ (amplituda funkce $y = \sin x$ je 1).
B určuje periodu – roztažení ve vodorovném směru, perioda funkce f je $\frac{2}{3}\pi$, proto $B = 3$ (podle vztahu $p = \frac{2\pi}{B}$, perioda funkce $y = \sin x$ je 2π).
Konstanta D určuje „posun“ grafu ve směru osy y, pro funkci f je posun o 1 ve směru záporné osy y („dolů“), proto $D = -1$.

20 $y = \binom{10}{6} \cdot 6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$

Odpověď C

Nejprve vybereme („označíme“) sedadla, která turisté obsadí – vybíráme 6 sedadel z 10 nezávisle na pořadí výběru, tedy tvoříme šestičlenné kombinace z 10 prvků, jejich počet vyjadřuje kombinační číslo $\binom{10}{6}$.

Potom začneme sedadla „obsazovat“ turisty – každému sedadlu „přidělíme“ jednoho turistu (představte si vybraná sedadla v řadě a jen měníme pořadí osob) - tvoříme permutace z 6 prvků, těch je (pro každý výběr sedadel) 6!. Násobíme podle kombinatorického pravidla součinu.
Jiný způsob uvažování (pro pokročilejší):
Tvoříme permutace s opakováním z 10 prvků, z nichž 4 jsou stejné (celkem 10 sedadel, 6 z nich obsadíme „rozlišitelnými“ turisty a 4 zůstanou prázdná – nerozlišitelná).
Jejich počet je pak $\frac{10!}{4!}$.

21 $a_1 = k \cdot a = k \cdot 12,5\ \text{cm}$

$b_1 = k \cdot b = k \cdot 10\ \text{cm}$

$c_1 = k \cdot c = k \cdot 8,5\ \text{cm}$

$a_1 - c_1 = 4,8\ \text{cm}$

$k \cdot 12,5\ \text{cm} - k \cdot 8,5\ \text{cm} = 4,8\ \text{cm}$

$4k\ \text{cm} = 4,8\ \text{cm}$

$k = \frac{4,8}{4} = \frac{6}{5}$

$b_1 = \frac{6}{5} \cdot 10\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$

Odpověď D

Pro podobné trojúhelníky platí, že odpovídající si strany jsou ve stejném poměru.

Využijeme údaj o rozdílu nejdelší a nejkratší strany, sestavíme a vyřešíme rovnici pro koeficient podobnosti k.

Dopočítáme délku prostřední strany b.

22 $2s_1 - s_2 + 12 = 0$

$s_1 = -3 + 2t$

$s_2 = 1 - t$

$2(-3 + 2t) - (1 - t) + 12 = 0$

$t = -1$

$s_1 = -3+2t \cdot (-1) = -5$

$s_2 = 1-(-1) = 2$

$S\,[-5; 2]$

$r_k = |ST| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

Odpověď A

Poloměr kružnice můžeme určit jako vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu. Bod T na kružnici k známe, proto stačí najít střed kružnice k, který je průsečíkem přímek p a q.

Průsečík přímek je bod, jehož souřadnice musejí vyhovovat rovnicím obou přímek, tedy obecné rovnici přímky p i parametrickému vyjádření přímky q. Označíme jeho souřadnice $S[s_1; s_2]$ a dosadíme je do daných rovnic. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešit budeme dosazovací metodou (využijeme vyjádřené s_1 a s_2 v druhé a třetí rovnici a dosadíme do první).

Délku úsečky ST počítáme podle vzorce:
$|ST| = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2}$

23 $\frac{s_4}{s_6} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

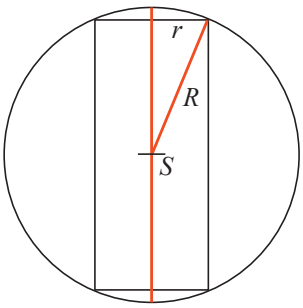
Odpověď C

Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit třemi úhlopříčkami (AD, BE, CF) na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Úsečky BD a DF vždy dva z těchto trojúhelníků půlí, proto obsah trojúhelníku BCD i obsah trojúhelníku DEF je roven obsahu každého ze zmiňovaných rovnostranných trojúhelníků. Obsah čtyřúhelníku ABDF je tedy rovný $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ obsahu šestiúhelníku.

Jiné řešení: Čtyřúhelník ABDF lze rozdělit na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABF, BSF, BDS, FDS. Do celého šestiúhelníku zbývají ještě dva shodné trojúhelníky (BCD a DEF), proto je poměr obsahů

$\frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

24



Načrtneme osový řez koule a vepsaného válce, označíme v výšku válce.

24 24.1

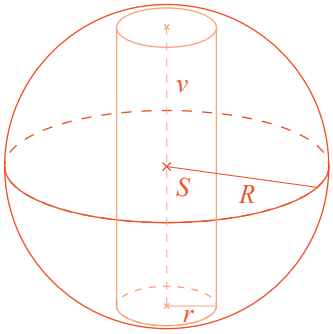
$R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$26^2 = 10^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$

$\frac{v}{2} = 24$

v = 48 cm (Tvrzení I. je pravdivé)



Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami r a $\frac{v}{2}$.

Podstavou válce je kruh, dosazením do vzorce $S_{po} = \pi r^2$ vypočítáme její obsah. Plášť válce je vlastně obdélník, jehož šířka je rovna obvodu podstavy ($o = 2\pi r$) a výška je rovna výšce válce.

24.2

$S_{po} = \pi r^2 = \pi \cdot 100\ \text{cm}^2$

$S_{pl} = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 10 \cdot 48 = 960\pi\ \text{cm}$

$\frac{S_{pl}}{S_{po}} = \frac{960\pi}{100\pi} =$ **9, 6 (Tvrzení II. je pravdivé)**

Pro porovnání objemu válce a koule vypočteme jejich objemy podle vzorců

$V_V = \pi r^2 \cdot v$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

Porovnáním podílů zjistíme, že válec zaujímá přibližně 20% objemu koule.

Povrch koule počítáme podle vzorce $S_K = 4\pi R^2$

24.3

$V_V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 10^2 \cdot 48 = 4800\pi\ \text{cm}^3$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 26^3 = \frac{70304}{3}\pi\ \text{cm}^3$

$\frac{V_V}{V_K} = \frac{4800\pi}{\frac{70304}{3}\pi} \doteq$ **0, 20 (Tvrzení III. není pravdivé)**

24.4

$S_K = 4\pi R^2 = 4\pi\ 26^2 = 2704\pi\ \text{cm}^2$

$\frac{S_K}{S_{pl}} = \frac{2704\pi}{960\pi} \doteq$ **2, 8 > 2 (Tvrzení IV. je pravdivé)**

25 25.1

$P = \frac{2}{5}$

Odpověď B

25.2

$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

Odpověď C

Pravděpodobnost náhodného jevu A počítáme jako poměr $P = \frac{m}{n}$, kde P je počet výsledků pokusu, při kterých jev A nastane, a n je počet všech možných výsledků pokusu.

I.

Táhneme-li z osudí, ve kterém je 5 koulí, jednu kouli, má tento pokus 5 možných výsledků, jevu A (tažení bílé koule) jsou příznivé 2.

Pravděpodobnost, že první vytažená koule je černá, je $\frac{3}{5}$. Protože vytažené koule se do osudí vracejí, pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je opět černá, je také $\frac{3}{5}$. Pravděpodobnost průniku nezávislých jevů počítáme jako součin pravděpodobností.

25.3

$P = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{13}{25}}$

Odpověď D

První dvě vytažené koule budou mít stejnou barvu. Tento případ může nastat dvěma způsoby – obě první koule budou černé, nebo obě první koule budou bílé. Jevy „první dvě vytažené koule budou černé“ a „první dvě vytažené koule budou bílé“ jsou neslučitelné, pravděpodobnost jejich sjednocení dostaneme jako součet jejich pravděpodobností

($\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ je pravděpodobnost toho,

že první dvě vytažené koule budou bílé).

26 26.1
Odpověď B

$f_1 : y = \frac{1}{3^x}$

je exponenciální funkce – grafem je exponenciála, základ je roven

$\frac{1}{3} < 1$, proto f_1 klesá ve svém

definičním oboru, vyhovuje jedině B.

26.2
Odpověď A

$f_2 : y = \frac{3}{x}$

je nepřímá úměrnost, grafem je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy, vyhovuje jedině A.

26.3
Odpověď C

$f_3 : y = \frac{x}{3}$

grafem je přímka s kladnou

směrnicí $\frac{1}{3}$, vyhovuje jedině C.

26.4
Odpověď D

$f_4 : y = \frac{1}{x-3}$

je lineární lomená funkce, grafem je hyperbola se středem v bodě [3; 0], vyhovuje jedině D.

ŘEŠENÍ – TEST 3

1 Pro snadnější porovnání čísel a určení, zda do intervalu patří nebo ne, zapíšeme všechna čísla ve stejném tvaru, např. jako čísla desetinná. Poté je zakreslíme na číselnou osu.

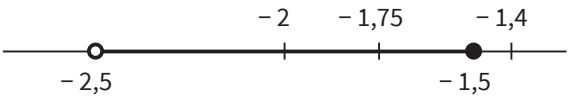
$-\frac{5}{2} = -2,5$

$-\frac{3}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{4} = -1,75$

$-1\frac{1}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{5} = -1,4$



Pro porovnání zadaných čísel bychom také mohli všechna čísla vyjádřit ve zlomcích se společným jmenovatelem.

Do zadaného intervalu tedy nepatří čísla −2, 5 a −1, 4. Určíme jejich součet:
$-2,5 + (-1,4) = \mathbf{-3,9}$

2 Nejprve určíme podmínky. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, proto $x + 4 \neq 0$ a $x - 4 \neq 0$, první podmínka je pro přirozená čísla splněna vždy, druhá pro $x \neq 4$.

$$\frac{4}{x+4} - \frac{20-x^2}{x^2-16} = \frac{1}{x-4} \qquad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$$4 \cdot (x-4) - (20 - x^2) = x + 4$$

$$4x - 16 - 20 + x^2 = x + 4 \qquad | -(x+4)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8) \cdot (x-5) = 0$$

$$\cancel{x = -8} \qquad \text{Kořen nepatří do množiny přirozených čísel } N.$$

$$\mathbf{x = 5}$$

případně K = {5}

Protože řešíme rovnici v množině přirozených čísel, podmínku $x \neq 4$ nemusíme uvádět. Kvadratickou rovnici můžeme řešit nejen rozkladem na součinový tvar, ale také pomocí diskriminantu a vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

3 $3^{21} - 11 \cdot 3^{20} + 3^{22} = 3 \cdot 3^{20} - 11 \cdot 3^{20} + 3^2 \cdot 3^{20} = 3^{20} \cdot (3 - 11 + 9) = \mathbf{3^{20}}$

Výraz je opravdu nutné upravit na základě pravidel pro počítání s mocninami. Výpočet pomocí kalkulačky nestačí, protože se v tomto případě hodnotí celý.

4 Aby byla definována odmocnina a logaritmická funkce, musí být splněny podmínky:

$2x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - 4x > 0$

$2x \geq -5 \qquad -4x > -2$

$x \geq -\frac{5}{2} \qquad x < \frac{1}{2}$

$K_1 = \left\langle -\frac{5}{2}; \infty \right) \qquad K_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$

Odmocnina se sudým exponentem je definována jen pro nezáporná reálná čísla. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná reálná čísla. U druhé nerovnosti pozor na násobení záporným číslem.

Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení obou nerovnic (K_1 a K_2).
Definiční obor funkce tedy je:

$$\mathbf{D = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)}$$

5 Při úpravě lomených výrazů je nutné rozložit čitatele i jmenovatele zlomků na součin. To se provádí vytýkáním nebo využitím vzorců. Poté můžeme krátit. Podmínky určujeme z rozložených jmenovatelů.

$$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2xy+x^2+y^2}{y}:\frac{y+x}{xy}=\frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}\cdot\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y+x}}=\mathbf{x(x+y)}\qquad \mathbf{[x\neq 0, y\neq 0]}$$

6 6.1

Všechny členy zapíšeme pomocí mocnin se základem 3 a upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami:

$$9^{x-2}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

$$3^{2(x-2)}=3^{-3}\cdot 3^x$$

$$3^{2x-4}=3^{x-3}$$

$$2x-4=x-3$$

$$\mathbf{x=1}$$

případně $K=\{1\}$

Pokud při řešení logaritmické rovnice neurčíme podmínky, musíme alespoň zkusit dosadit vypočtený kořen do zadané rovnice a zjistit, zda jsou pro něj logaritmy definovány. U exponenciální rovnice podmínky a zkoušku dělat nemusíme, protože jde o prostou funkci, která je definována pro všechna čísla z R.

6.2

Nejprve určíme podmínky: $x>0$

Členy upravíme pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu:

$$\log_2 x+\log_2 4=4$$

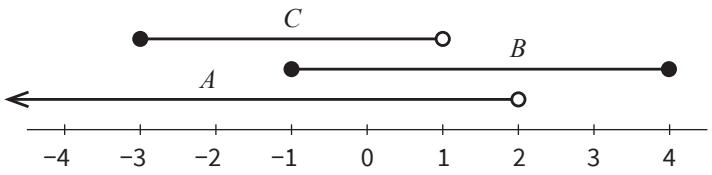
$$\log_2 4x=4$$

$$4x=16$$

$$\mathbf{x=4}$$

případně $K=\{4\}$

7 Intervaly A, B, C zakreslíme na číselnou osu. Okraj intervalu C zvolíme tak, aby se intervaly A, B, C překrývaly na intervalu $\langle -1; 1)$.



$\mathbf{c=1}$

8 Výšky klád tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_1=15$ cm; $a_{17}-a_9=32$ cm

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci:

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

$$a_{17}=a_9+(17-9)\cdot d$$

$$d=\frac{a_{17}-a_9}{8}$$

po dosazení:

$d=4$ cm

Pro výpočet třináctého členu posloupnosti využijeme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$$a_{13}=a_1+(13-1)\cdot d$$

po dosazení:

$a_{13}=15\text{cm}+12\cdot 4\text{ cm}=$ **63 cm**

9 Nejprve určíme dvacátý člen posloupnosti ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d$

po dosazení:

$a_{20} = 15\text{ cm} + 19 \cdot 4\text{ cm} = 91\text{ cm}$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

po dosazení:

$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (15\text{ cm} + 91\text{ cm})$

$\mathbf{s_{15} = 1060\text{ cm}}$

10 Některé výrazy s faktoriály částečně rozepíšeme na součin, vytkneme a pokrátíme:

$$\frac{500! + 499!}{499!} - \frac{501! - 500!}{500!} = \frac{500 \cdot 499! + 499!}{499!} - \frac{501 \cdot 500! + 500!}{500!} =$$

$$= \frac{499!\,(500 + 1)}{499!} - \frac{500!\,(501 - 1)}{500!} = 501 - 500 = \mathbf{1}$$

Při úpravě výrazů s faktoriály rozepisujeme faktoriál většího z čísel na součin. Vypíšeme tolik činitelů, abychom se dostali na úroveň menšího z čísel.

11 11.1
Funkční hodnotu v bodě -2 určíme dosazením čísla -2 do předpisu funkce:

$a_2 = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

11.2
Průsečíky s osou x mají y-ovou souřadnici nulovou. Do předpisu funkce tedy dosadíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnici:

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$D < 0$ Rovnice nemá reálné kořeny. **Průsečíky grafu funkce f s osou x neexistují.**

12 Celý objem nádoby je $V = \frac{3}{2} \cdot 1\text{ l} = 1,5\text{ l} = 1500\text{ cm}^3$.

Pro objem válce platí vztah:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

Výška válce je stejná jako průměr jeho podstavy, tedy $v = 2r$:

$V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$

Vyjádříme poloměr r a dosadíme:

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \doteq \mathbf{6,2\text{ cm}}$

13 Šest hledaných čísel se pokusíme zapsat do šesti polí tabulky tak, aby byla řada čísel uspořádána vzestupně. Protože má mít medián hodnotu 5,5, musí být ve středních polích tabulky čísla, jejichž průměr je 5,5. Ve třetím a čtvrtém poli by tedy mohla být např. čísla 5 a 6:

		5	6		

Protože má mít modus hodnotu 8, musí být toto číslo zastoupeno alespoň dvakrát. Do posledních dvou polí zapíšeme číslo 8:

		5	6	8	8

Protože má mít aritmetický průměr hodnotu 5, musí být součet všech šesti čísel 6 · 5 = 30. Součet už doplněných čísel je 27, na zbylá dvě pole zbývá součet 3. Doplníme tedy čísla 1 a 2:

1	2	5	6	8	8

Soubor hledaných čísel je tedy např: 1, 2, 5, 6, 8, 8.

Úloha má další dvě řešení:

	2	4	7	8	8
	2	3	8	8	8

14 Vrchol vysílače, pata vysílače a okno tvoří trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti $\gamma = 53°$, sevřeným stranami délky $a = 102$ m a $b = 137$ m. Trojúhelník je podle věty *sus* zadán jednoznačně.

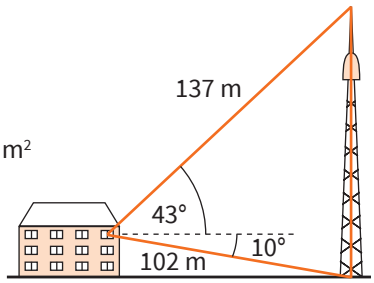
Výšku vysílače v určíme pomocí kosinové věty:

$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

po dosazení:

$v^2 = (1372 + 1022 - 2 \cdot 137 \cdot 102 \cdot \cos 53°)\ \text{m}^2$

v = **111 m**



Kosinovou větu používáme pro řešení trojúhelníků zadaných podle vět sss a sus. Naopak sinovou větu používáme tehdy, je-li trojúhelník zadán podle věty usu nebo Ssu.

Další řešení: Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a k výpočtu použijeme goniometrické funkce ostrého úhlu.

15 15.1

Pravděpodobnost jevu A počítáme jako podíl počtu výsledků m příznivých danému jevu a celkového počtu možných výsledků n.

$m = 6$ (počet dvoukorunových mincí)

$n = 16$ (počet všech mincí)

$P_{(A)} = \frac{6}{16} = 0,375 \sim$ **37,5%**

15.2

$m = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ (počet pětic mincí, ve kterých jsou 3 dvoukorunové 2 pětikorunové mince)

$n = \binom{16}{5} = 4368$ (počet všech pětic mincí)

$P = \frac{60}{4368} \doteq 0,014 \sim$ **1,4%**

Při úvahách o počtu skupin mincí, které můžeme sestavit, je lepší předpokládat, že jsou i mince stejné hodnoty vzájemně rozlišitelné. Představme si například, že je na nich uveden různý rok vyražení, což samozřejmě nemá vliv na výsledek úlohy.

16 16.1

Vrchol C získáme posunutím vrcholu B o vektor $\vec{d}$. Pro jeho souřadnice tedy platí:

$C = B + \vec{d} = [8; 4] + (1; 3) = \mathbf{[9; 7]}$

A N

16.2

Nejprve určíme souřadnice vrcholu D, který je posunutím vrcholu A o vektor $\vec{d}$:

$D = A + \vec{d} = [1; 3] + (1; 3) = [2; 6]$

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{BD}$ určíme ze vztahu:

$\overrightarrow{BD} = (d_1 - b_1; d_2 - b_2) = \mathbf{(-6; 2)}$

A N

16.3

Souřadnice středu rovnoběžníku určíme jako aritmetický průměr souřadnic bodů A, C:

$S\left[\frac{1+9}{2}; \frac{3+7}{2}\right] = \mathbf{[5; 5]}$

A N

16.4

Nejprve určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$:

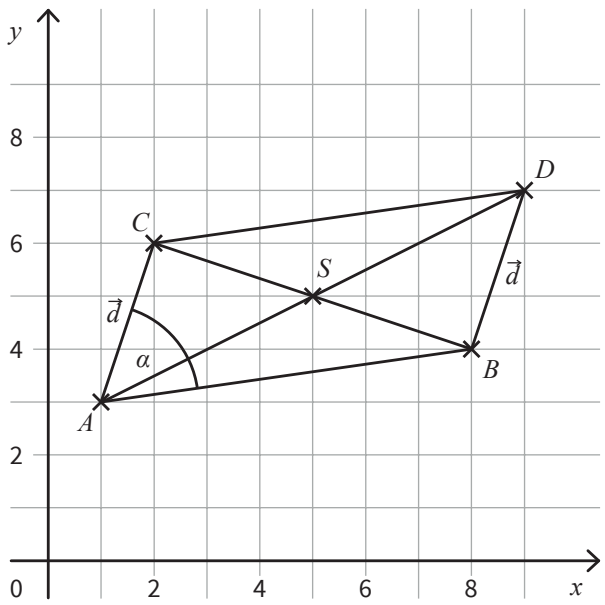
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (7; 1)$

Kosinus hledaného úhlu určíme ze vztahu:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha \doteq \mathbf{63°26'}$

A N



17 Nejprve si vhodně označíme neznámé počty diod. Abychom nemuseli počítat se třemi neznámými, pokusíme se označit počty diod pomocí jediné proměnné x.

červených diod x
zelených diod ..... $1{,}5x$
modrých diod ..... $1{,}5x + 2$
sestavíme rovnici:

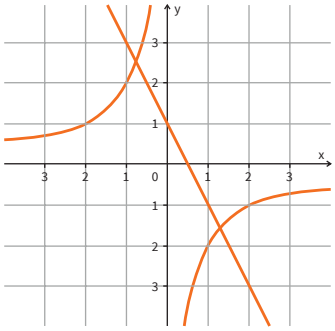
$$x + 1{,}5x + 1{,}5x + 2 = 50$$
$$4x = 48$$
$$x = 12$$

Na stromku je tedy 12 červených, 18 zelených a 20 modrých diod.

A) ~~Červených diod je 14.~~
B) ~~Zelených a modrých diod je dohromady 36.~~
C) ~~Modrých diod je 18.~~
D) Zelených diod je o 6 více než červených.
E) ~~Červených diod je 10.~~

Počty diod by samozřejmě bylo možné označit třemi neznámými, ale museli bychom pak sestavit soustavu tří rovnic, jejíž řešení je pracnější.

18 Grafem funkce $f: y = -2x + 1$ je strmě klesající přímka protínající osu y v bodě [0; 1]. Tomu odpovídají obrázky D a E. Grafem funkce $f: y = \frac{-2}{x}$ je hyperbola, která má své větve ve II. a IV. kvadrantu. Tomu odpovídají obrázky A, C, a E. **Oba grafy jsou tedy správně sestrojeny na obrázku E.**



19 Délky hran kvádru a, b, c označme pomocí jediné neznámé a, $b = 2a$, $c = 3a$, čímž si zajistíme požadovaný poměr délek hran.
Pro povrch kvádru platí:

$$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$$

Dosadíme naše délky hran:

$$S = 2 \cdot (2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$$

Vyjádříme neznámou a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{22}} = \sqrt{\frac{2\,662\ \text{cm}^2}{22}} = 11\ \text{cm}$$

Nejdelší hranou je hrana $b = 3a = 33$ cm.

A) 27 cm
B) 29 cm
C) 30 cm
D) 32 cm
E) jiná délka

20 Z rovnosti vyjádříme rámeček a upravíme:

$\boxed{} = 3\,(a+2)^2 - 2\,(a+3)^2 = 3 \cdot (a^2 + 4a + 4) - 2 \cdot (a^2 + 6a + 9) =$
$= 3a^2 + 12a + 12 - 2a^2 - 12a - 18 = \mathbf{a^2 - 6}$

A) $\boxed{a^2 + 6}$

B) $\boxed{\mathbf{a^2 - 6}}$

C) $\boxed{a + 6}$

D) $\boxed{a - 6}$

E) jiný rámeček

21 Porovnáním zadaného grafu s grafem funkce $y = \cos x$ je zřejmé, že se jedná také o funkci kosinus. Graf má ale dvojnásobnou „výšku“ a je posunut o jedna v kladném směru osy y.

Jeho předpis tedy je:

$\mathbf{y = 2 \cdot \cos x + 1}$

A) $y = 2 \cdot \sin x + 1$
B) $y = \sin x + 2$
C) $y = \sin 2x + 1$
D) $y = \cos 2x + 1$
E) $\mathbf{y = 2 \cdot \cos x + 1}$

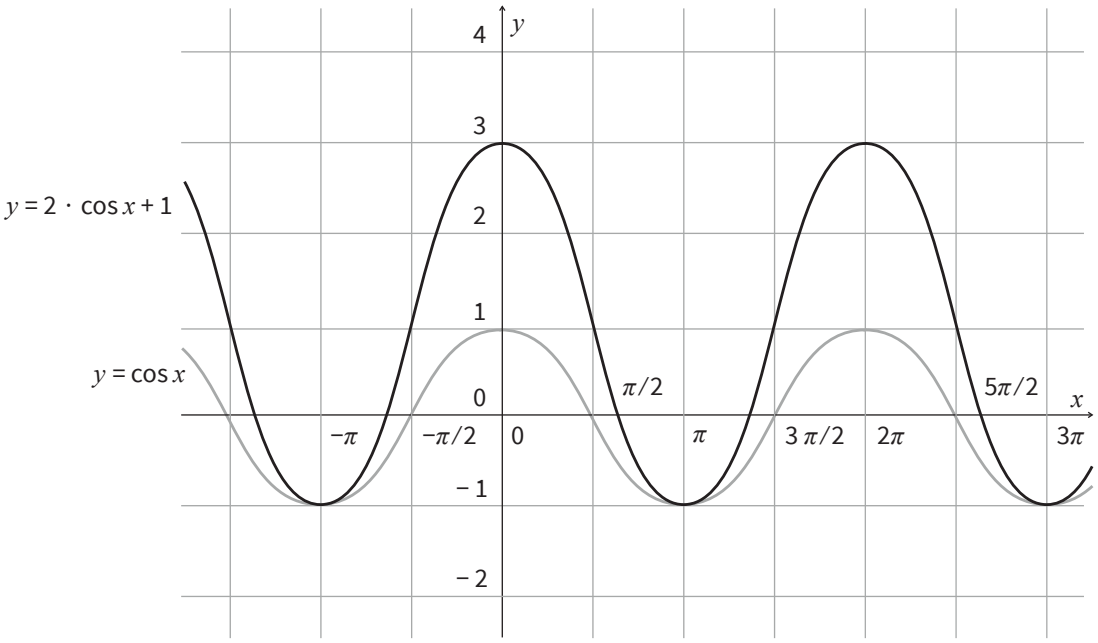
Obecně se dá říci, že graf goniometrické funkce o předpisu $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ ovlivňují jednotlivé koeficienty:

a ... ovlivňuje „výšku“ grafu

b ... ovlivňuje periodu funkce $\left(\text{ta je } \frac{2\pi}{|b|}\right)$

c ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy x

d ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy y



22 Nejprve určíme obsah půlkruhu:

$S_1 = \frac{\pi c^2}{8} \doteq 353{,}43\ \text{m}^2$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (podle Thaletovy věty), k určení jeho obsahu tedy stačí znát délky jeho odvěsen:

$a = c \cdot \cos\beta \doteq 24{,}57$ m
$b = c \cdot \sin\beta \doteq 17{,}21$ m

Obsah trojúhelníku ABC je tedy:

$S_2 = \frac{a \cdot b}{2} \doteq 211{,}42\ \text{m}^2$

Poměr obsahů je:

$\frac{S_1}{S_2} \doteq 0{,}60 \sim 60\%$

Plocha záhonů tvoří doplněk do 100 %, což je 40 %.

A) 35%
B) 40%
C) 42%
D) 45%
E) 48%

23 Normálovým vektorem hledané přímky p je např. vektor $\overrightarrow{BA} = (8; -4)$.
Pro sestavení obecné rovnice přímky p použijeme k- násobek vektoru AB
$\vec{n}_p = (2; -1)$.

Rovnice tedy bude mít tvar:
$p: 2x - y + c = 0$

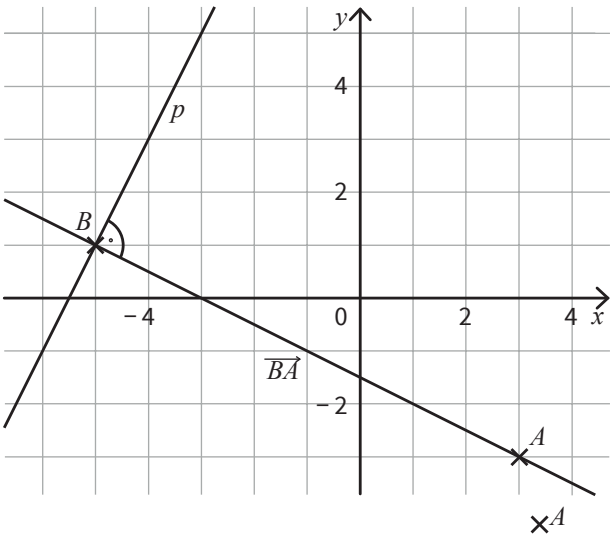
Neznámý koeficient c dopočítáme dosazením souřadnic bodu B, který na přímce p leží:
$2(-5) - 1 + c = 0$

$c = 0$

Přímka p má tedy rovnici:
$\mathbf{p: 2x - y + 11 = 0}$

Libovolný nenulový násobek této rovnice je opět rovnicí stejné přímky.
Takže pokud bychom použili přímo vektor $\overrightarrow{BA}$, dostali bychom rovnici p: $8x + 4y + 44 = 0$, která je také správným řešením.

A) $p: x + 2y + 3 = 0$
B) $p: x - 2y + 7 = 0$
C) $p: 2x - y + 7 = 0$
D) $p: 2x - y + 11 = 0$
E) $p: x + 2y + 11 = 0$



24 K_{10} = 3 500 000 Kč (dlužná částka po deseti letech)
p = 0,048 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 10 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Pro výši dlužné částky po n letech platí vztah:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Vyjádříme počáteční výši úvěru:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}$$

po dosazení:

$$K_0 = \frac{3\,500\,000 \text{ Kč}}{(1 + 0,048)^{10}} \doteq 2\,190\,000 \text{ Kč}$$

A) 2 190 000 Kč
B) 2 240 000 Kč
C) 2 280 000 Kč
D) 2 390 000 Kč
E) jinou částku

25 Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic koncových bodů úsečky.
Pro výpočet vzdálenosti bodů A, B používáme vzorec: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

25.1
$a = |BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{68} =$ **$2\sqrt{17}$ ... F)**

25.2
Nejprve určíme střed strany a:

$$S_a\left[\frac{4-4}{2}; \frac{5+3}{2}\right] = [0; 4]$$

$t_a = |AS_a| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} =$ **$\sqrt{13}$ ... A)**

25.3
$c = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = 20 =$ **$2\sqrt{5}$ ... B)**

25.4

$$S_c\left[\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right] = [3; 3]$$

$t_c = |CS_c| = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49+0} =$ **7 ... D)**

Při určování velikosti úsečky nezáleží na pořadí, ve kterém odečítáme souřadnice bodů. Ale při určování souřadnic vektoru na tomto pořadí záleží. Od souřadnic koncového bodu musíme odečítat souřadnice počátečního bodu.

26 Pravidelný desetiúhelník můžeme rozdělit na 10 shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Vnitřní úhel proti základně má tedy velikost $\frac{360°}{10} = 36°$.

Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180°, mají zbylé vnitřní úhly velikost 72°.

Vyznačené úhly pak mají velikost:

26.1 $\alpha = 3 \cdot 36° =$ **108° ... C**
26.2 $\beta = 2 \cdot 72° =$ **144°... D**
26.3 $\gamma =$ **72°... E**

U pravidelných n-úhelníků bývá také často za úkol výpočet poloměru kružnice vepsané a opsané. V těchto typech příkladů se také vyplatí rozdělit n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků a dále pracovat s jedním z nich.

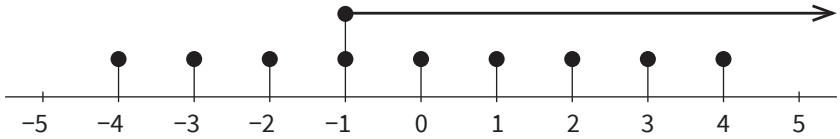
ŘEŠENÍ – TEST 4

1 Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, tj.:

$A = \{x \in Z\}; |x| < 5 = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu –1, tj.:

$B = \{x \in R\}; x \geq -1 = \langle -1; \infty)$



Průnik množiny A a B bude obsahovat čísla, která mají obě množiny společné, tj. čísla, která patří jak do množiny A, tak do množiny B.
Průnik těchto dvou množin obsahuje pouze 6 čísel:

$A \cap B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, obsahuje pouze 9 čísel.
Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu –1, obsahuje tedy nekonečně mnoho čísel v intervalu $\langle 1; \infty)$.
Špatně by bylo, kdybychom zapsali výsledek jako interval, tj. $\langle 1; 4 \rangle$.

2 Litry si převedeme na cm³:

829 litrů = 829 dm³ = 829 000 cm³

Číslo a, které splňuje podmínku

$1 \leq a < 10$ je 8,29.

Abychom dostali číslo 829 000, musíme 8,29 vynásobit číslem 100 000, tj. číslem 10^5, proto je 829 000 cm³ = **$8{,}29 \cdot 10^5$ cm³**.

3 $\frac{x^2-5}{x-5} - 1 = \frac{x^2-5-(x-5)}{x-5} = \frac{x^2-5-x+5}{x-5} = \frac{x^2-x}{x-5}$

4 Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Jestliže druhý den přišlo na výstavu o 50 osob více, bylo tam tedy $(k + 50)$ osob

a ty zaplatily $\frac{m}{k}(k+50)$ korun.

Výraz se dá upravit a roznásobit do tvaru:

$m + 50\frac{m}{k}$

Jiný postup řešení:
Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Pokladní tedy druhý večer vybrala opět m korun,

ale navíc ještě od 50 osob $50\frac{m}{k}$ korun.

Tedy celkem za druhý večer vybrala $(m + 50\frac{m}{k})$ korun.

Žáci zde často dělají chybu, že ve zlomku krátí x^2 v čitateli s x ve jmenovateli a –5 v čitateli i jmenovateli. Případně by se mohlo stát, že žák v euforii, že je v čitateli jasný vzorec, rozloží čitatel chybně na součin $(x - 5)(x + 5)$ a poté krátí čitatel a jmenovatel, k čemuž tato úloha opravdu svádí.
V zadání není uvedeno, že máme určit podmínky. Proto je zde neurčujme! V případě, že je určíme a budou správné (tj. $x \neq 5$), nic se neděje.
V případě, že je určíme chybně, pravděpodobně za ně bude odečten bod, tj. i když máme správně výsledek, získáme za úlohu jen 1 bod, protože u široce otevřených úloh se hodnotí vše, co žák do záznamového archu napíše.
Pozor: u rovnice s neznámou ve jmenovateli je naopak důležité podmínky určit, i když to v zadání není napsané. Můžeme tím zjistit, že výsledek, který nám vyšel, není v souladu s podmínkami a řešením rovnice tedy není.

5 $\frac{2x^2 - 9x + 9}{2x - 3} = 1$

Podmínky: jmenovatel se nesmí rovnat 0, tj. $2x - 3 \neq 0$, z toho plyne, že $x \neq \frac{3}{2}$.

Dále budeme řešit samotnou rovnici. Celou rovnici vynásobíme výrazem $2x - 3$:

$2x^2 - 9x + 9 = 2x - 3$

Převedeme si všechny členy na levou stranu:

$2x^2 - 9x + 9 - 2x + 3 = 0$

Získáme kvadratickou rovnici:

$2x^2 - 11x + 12 = 0$

Koeficienty této rovnice jsou: $a = 2$, $b = -11$, $c = 12$

Pro diskriminant kvadratické rovnice platí vztah: $D = b^2 - 4ac$. Dosadíme koeficienty a získáme

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Po dosazení získáme:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}$

Pro jednotlivé kořeny platí:

$x_1 = \frac{11 + 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$x_2 = \frac{11 - 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Porovnáme výsledky s podmínkami a zjistíme, že kořen x_2 nesplňuje podmínky řešitelnosti, proto je řešením zadané rovnice pouze číslo $x = 4$.

***K* = {4}**

6 6.1

Průsečíky s osou x jsou ty body grafu funkce f, které mají nulovou y-ovou souřadnici, proto:

$y = x^2 + 3x - 40 = 0$

Budeme řešit kvadratickou rovnici. Vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-40) = 169$.

Dosadíme do vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 13}{2}$

$x_1 = 5, x_2 = -8$

P_x = [5; 0], P'_x = [−8; 0]

6.2

Nejdříve vypočítáme vrchol paraboly. Pro x-ovou souřadnici vrcholu platí vzorec:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$

Souřadnici y_v dopočítáme dosazením za x do předpisu funkce. $\left(\text{Nebo použijeme vzorec: } y_v = \frac{b^2}{2a}\right)$.

$$y_v = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 40 = -\frac{169}{4}$$

Funkce f má koeficient $a = 1 > 0$, tj. parabola bude otevřená směrem nahoru.

Obor hodnot funkce tedy bude:

$$H_f = \left\langle -\frac{169}{4}; \infty \right)$$

7 $5 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+1} + 108 = 0$

$$5 \cdot \frac{3^x}{3} - 3 \cdot 3^x = -108$$

$$5 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x = -324$$

$$-4 \cdot 3^x = -324$$

$$3^x = 81$$

$$x = 4$$

8 Katalogová cena košile ... x Kč

Po zvýšení o čtvrtinu hodnoty ... $\left(x + \frac{1}{4}x\right)$ Kč

Po snížení o 360 Kč ... $\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right)$ Kč

Cena 8 košilí ve výprodeji stojí stejně jako 1 košile za katalogovou cenu, tj.

$$8\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right) = x$$

$$8x + 2x - 2880 = x$$

$$9x = 2880$$

$$x = 320$$

Katalogová cena jedné košile byla **320 Kč**.

9 Fotografie má tvar obdélníku a její plocha je rovna obsahu obdélníku, tj. 21 cm · 14 cm = 294 cm^2.

Plocha obrazu včetně rámu je dvojnásobná, tj. $S_{obrazu} = 2 \cdot 294$ cm^2 = 588 cm^2.

Označíme si šířku rámu x, pak délky stran obrazu jsou $(21 + 2x)$ cm a $(14 + 2x)$ cm :

$S_{obrazu} = (21 + 2x)(14 + 2x) = 588$ (kde x je šířka rámu)

Po úpravě:

$2x^2 + 35x - 147 = 0$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = 2401$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-35 \pm 49}{2}$

$x_1 = 3{,}5$ a $x_2 = -21$

Zadání úlohy vyhovuje pouze kladný kořen (x je šířka rámu), tj. $x = 3{,}5$ cm.

Rozměry obrazu: 14cm + 2 · 3,5 cm = **21 cm** a 21 cm + 2 · 3,5 cm = **28 cm**.

10 Hledáme čtveřici čísel, z nichž každé je jiné a záleží na pořadí, jde tedy o variace bez opakování.

Vybíráme celkem z deseti čísel (0, 1, 2 až 9) a vybíráme čtyři čísla, tj.
zápis variace 4. třídy z 10 prvků

$$V = \frac{10}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

11 11.1
Celkový počet objednávek je 141, tj. je to liché číslo, zajímá nás tedy údaj, který je u 71. objednávky, a to je **srpen**.

11.2
Modus je měsíc, ve kterém bylo učiněno nejvíce objednávek, tj. **červen**.

12 $\left(\frac{3}{n^2 n^4}\right)^{-1} - \left(\frac{n^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{n^6}\right)^{-1} - \frac{n^6}{27} = \frac{n^6}{3} - \frac{n^6}{27} = \frac{9n^6 - n^6}{27} = \frac{8n^6}{27}$ nebo $\frac{8}{27}n^6$

13 Na začátku stál robot 390 000 Kč,
po prvním roce stál $p \cdot 390\,000$ Kč,
po druhém roce $p^2 \cdot 390\,000$ Kč,
po třetím roce $p^3 \cdot 390\,000$ Kč.

Tj. $p^3 \cdot 390\,000$ Kč = 24 960 Kč,

vypočítáme p a vyjde

$p = 0{,}4 = 40$ %. Odepisujeme tedy 100 % – 40 % = **60 %**.

14 První dvě vytažené čokolády mají být mléčné:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je 3,

druhou čokoládu vybíráme už jen ze 6 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je nyní jen 2,

tj. $P = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

15 První vytažená čokoláda má být hořká a druhá mléčná:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád a počet příznivých jevů je 4,

druhou vybíráme už jen ze 6 čokolád a počet příznivých jevů (mléčných čokolád) je 3,

tj. $P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

16 16.1 A ☐ N ■

Upravíme výraz $A = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2$ podle vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\left(3x - \frac{y}{2}\right)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x\,\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \neq \mathbf{9x^2 - 3xy + 4y^2}$

16.2 A ■ N ☐

Upravíme výraz $A = a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2$; vytkneme z prvních dvou členů a^2 a z dalších dvou členů b^2,

tj. $a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2 = a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9)$.

A dále vytkneme závorku $(a - 9)$,

tj. $a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9) = (a^2 - b^2)\,(a - 9)$

První závorka je vzorec, rozložíme podle něj závorku a získáme:

$(a^2 - b^2)\,(a - 9) = \mathbf{(a - b)\,(a + b)\,(a - 9)}$

Nebo můžeme upravovat výraz B – roznásobit postupně všechny závorky – a dojdeme tím k výrazu A.

16.3 A N

Upravíme výraz A, vydělíme čitatele i jmenovatele číslem 4:

$$\frac{4\,(x-2)}{x+8} = \frac{x-2}{\frac{x+8}{4}}$$

Ve jmenovateli rozdělíme zlomek na zlomky dva:

$$\frac{x-2}{\frac{x+8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+\frac{8}{4}} = \mathbf{\frac{x-2}{\frac{x}{4}+2}}$$

Nebo můžeme upravovat výraz B a dojdeme tím k výrazu A.

16.4 A N

Upravíme výraz $A = (2-9k)^2 - 16$ podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$A = (2-9k)^2 - 16 = (2-9k-4)(2-k+4)$.

Závorky upravíme a získáme výraz:

$(-2-9k)(6-9k) \neq \mathbf{(2-9k)(6-9k)}$

17 Čitatel zlomku na levé straně nerovnice je záporný (je roven –5).

Má-li být celý zlomek menší nebo roven nule, pak musí být jmenovatel zlomku kladný.

(POZOR: jmenovatel se nesmí rovnat nule!) Musí tedy platit:

$2x - 9 > 0$

$2x > 9$

$x > \frac{9}{2}$

tj. $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ **C)** $\left(\frac{9}{2}; \infty\right)$

18 Jablek ..... 16 ks, nezralých jablek ..... 16 : 4 = 4 ks, vyhodíme 2 ks ..... zůstala 2 nezralá jablka

Banánů ..... 28 ks, nezralých banánů ..... 28 : 4 = 7 ks, vyhodíme 2 ks ..... zůstalo 5 ks nezralých banánů,

Celkem ..... 44 ks, nezralé ovoce celkem ..... 11 ks, vyhodíme 4 ks ..... zůstalo 7 ks nezralého ovoce.

Na začátku: 100 % ..... 44 ks ovoce

x % ..... 11 ks nezralého ovoce

$x = \frac{11}{44} \cdot 100\,\% = 25\,\%$

Nebo také: jestliže je nezralá čtvrtina jablek a čtvrtina banánů, pak je nezralá čtvrtina ovoce, tj. 25 %.

Po vyhození: 100 % ..... 40 ks ovoce

x % ..... 7 ks nezralého ovoce

$x = \frac{7}{40} \cdot 100\ \% = 17,5\ \%$

Závěr: 25 % - 17, 5 % = 7, 5 %.

Jestliže vyhodíme 2 nezralá jablka a 2 nezralé banány, klesne v bedně počet nezralého ovoce o 7, 5 %. B)

19 $R = k \cdot \frac{d}{S}$

Pravou i levou stranu rovnice vynásobíme veličinou S, potom:

$R \cdot S = k \cdot d$

Pravou i levou stranu rovnice vydělíme veličinou k, potom:

$\frac{RS}{k} = d$

$d = \frac{RS}{k}$ **D)** $d = \frac{RS}{k}$

20 Poměr stran obdélníku je 4:3, strana $a = 4x$ a strana $b = 3x$, pro obvod platí $o = 28 = 2(a + b)$, tj.

$28 = 2(4x + 3x)$, a odtud vypočítáme, že $x = 2$ cm, tedy $a = 4 \cdot 2$ cm = 8 cm, $b = 3 \cdot 2$ cm = 6 cm.

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven obsahu dvou trojúhelníků CDS.

Obsah trojúhelníku CDS: $S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12\ \text{cm}^2$

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku CDS, tj. $S = 2 \cdot 12 = 24\ \text{cm}^2$.

A) 24 cm²

21 Papír má tvar obdélníku, obsah tohoto obdélníku, tedy 1 ks papíru je: $S = 0,21 \cdot 0,297 = 0,06237\ \text{m}^2$.

Obsah 500 ks papírů; (tj. jednoho balení) je: $S = 500 \cdot 0,06237\ \text{m}^2 = 31,185\ \text{m}^2$.

1 m² ..... 80 g

31,185 m² ..... x g

$x = 31,185 \cdot 80 = 2494,8$ g = 2,4948 kg ≐ **2,5 kg D)**

22 Podle tvaru grafu jde o exponenciální funkci. **E)** $y = 3^x - 1$

Grafem A) by byla přímka,
grafem B) parabola,
grafem C) hyperbola, logaritmická funkce
D) graf logaritmické funkce, není ale definován pro x menší nebo rovno 0
E) exponenciála (rostoucí), posunutá o 1 dolů

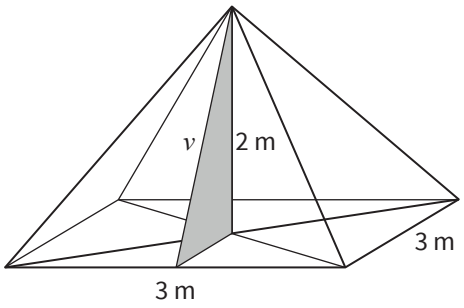
Případně můžeme i zkoušet za x a y dosazovat hodnoty a ověřovat, jestli bod leží na grafu funkce, např. u funkce A) zkusíme za x dosadit −1, v tom případě $y = -2$, ale bod [−1; −2] neleží na grafu funkce f apod.

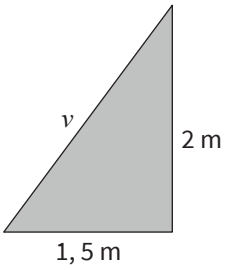
23 Nakreslíme si jehlan (střechu) a popíšeme prvky, které známe.

Střecha se skládá ze čtyř shodných trojúhelníků se základnou 3 m.

Označíme si výšku v trojúhelníku, ze kterého budeme výšku počítat.

Trojúhelník je pravoúhlý, z Pythagorovy věty získáme v: $v^2 = 1{,}5^2 + 2^2$, tj. $v = 2{,}5$ m.

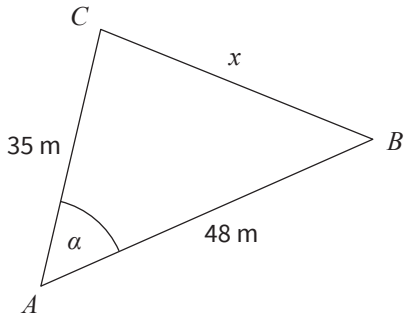




Nyní již můžeme vypočítat plochu střechy: $S = 4 \cdot S_{troj.} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5}{2} = 15\ \text{m}^2$. **D) 15 m²**

24 V trojúhelníku známe dvě strany a úhel mezi nimi, úkolem je spočítat stranu proti úhlu.

Délku strany CB tedy spočítáme pomocí kosinové věty.



$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$x^2 = 35^2 + 48^2 - 2 \cdot 35 \cdot 48 \cdot \cos 53°25' \doteq 1526{,}47$

$x \doteq 39$ m **B) 39 m**

25 Nejprve určíme souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC: $A = [-2; -1]$, $B = [4; -3]$, $C = [1; 3]$.

25.1

Souřadnice středu S strany AB vypočítáme ze vztahu $S = \frac{A + B}{2}$, tj. $S = \left[\frac{-2+4}{2}; \frac{-1-3}{2}\right] = [1; -2]$.

Nyní vypočítáme souřadnice směrového vektoru přímky $\overleftrightarrow{SC}$,

$\vec{s} = \overrightarrow{SC} = (1 - 1; 3 - (-2)) = (0; 5)$.

Vektor (0; 5) má z nabízených souřadnic stejný směr jako vektor (0; 1) **E) (0; 1)**

25.2
Směrový vektor přímky BC je $\overrightarrow{BC} = (1 - 4; 3 - (-3)) = (-3; 6) \sim (-1; 2)$.

Normálový vektor přímky BC je tedy $\vec{n} = (2; 1)$ ... přehodíme x-ovou a y-ovou souřadnici a u jedné změníme znaménko. **B) (2; 1)**

25.3
Je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AC, mají stejné směrové vektory bez ohledu na to, kterým bodem přímka p prochází. Směrový vektor přímky p je tedy:

$\vec{s} = \overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$ **F) (3; 4)**

25.4
Směrový vektor osy x má souřadnice (1;0).

Jestliže to nevíme, můžeme si na ose x zvolit libovolné dva body, např. $O = [0; 0]$ a $D = [1; 0]$, a určit směrový vektor osy x jako směrový vektor přímky OD,

$\vec{s} = \overrightarrow{OD} = (1 - 0); 0 - 0) = (1; 0)$.

Z nabízených vektorů má stejný směr vektor (5; 0). **C) (5; 0)**

26 26.1
Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože rozdíl počtu cestujících každých dvou sousedních vagonů je stejný (diference d). $a_{20} = 97$, $a_{30} = 147$, $a_1 = ?$

$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

$d = \frac{a_r - a_s}{r - s} = \frac{147 - 97}{30 - 20} = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d = 97 - (20 - 1) \cdot 5 = 2$

A) 2

26.2
$s_{10} = ?$

$s_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$

Vypočítáme desátý člen:

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 27 + 9 \cdot 5 = 47$

$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 47) = 245$

E) 245

26.3
$a_{31} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot d = 2 + 30 \cdot 5 = 152$

D) 152

nebo $a_{31} = a_{30} + d = 147 + 5 = 152$

ŘEŠENÍ – TEST 5

1 V pátek a v sobotu ušli $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{12}$ z celé trasy. Na neděli zbývá tedy $\frac{5}{12}$ z 11 km, tj. $\frac{55}{12}$ km ≐ 4 600 m.

2 Podle definice logaritmu $r-5=3^p$, tedy $r=3^p+5$

3 $\sqrt{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{12}}$

4 $\left.\begin{matrix}A[-3;0]\\C[2;0]\end{matrix}\right\}\rightarrow y=a(x+3)(x-2)$

$y=a(x^2+x-6)$

$B[0;3]\in f\rightarrow 3=-6a\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$f: y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$

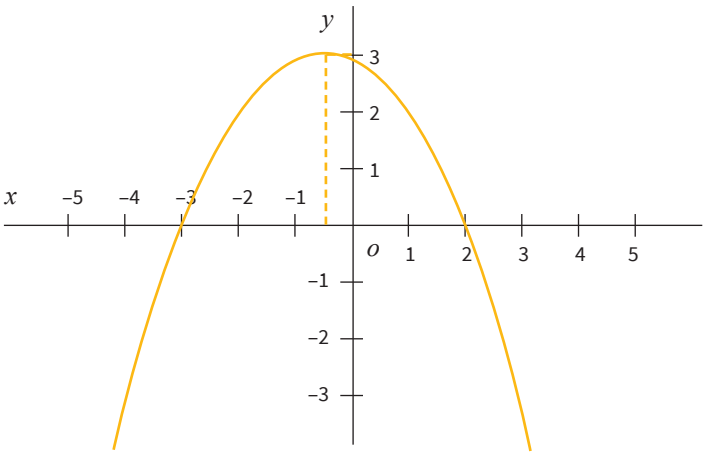
$V[m;n]=-\frac{b}{2a},\ n=f(m)$

$m=-\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$

$n=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+3=\frac{25}{8}$

$V\left[-\frac{1}{2};\frac{25}{8}\right]$

Největší hodnota funkce f je rovna $\frac{25}{8}$.



Využijeme znalost průsečíků grafu funkce f se souřadnicovou osou x a rozložíme kvadratický trojčlen, chybějící koeficient a získáme ze třetího zadaného bodu.
Grafem kvadratické funkce je parabola, pro a<0 „otevřená dolů“. Pro určení maximální hodnoty musíme najít souřadnice jejího vrcholu.

5 $\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\leq\frac{(3x+1)^2}{4}\quad /\cdot 4$

K řešení nerovnice použijeme ekvivalentní úpravy nerovnic.

$2(x-1)^2+8(x+1)^2\leq(3x+1)^2$

$2(x^2-2x+1)+8(x^2+2x+1)\leq 9x^2+6x+1$

$2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 \leq 9x^2 + 6x + 1$

$x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$(x + 3)^2 \leq 0$

$x = -3$

$K = \{-3\}$

Kvadratický člen $(x + 3)^2$ nemůže nabývat záporné hodnoty. Proto řešíme „jen“ rovnici $(x + 3)^2 = 0$, která má jediné řešení.

6 $3(2x - y)(x + 5y) + x(x - 27y) = 3(2x^2 - xy + 10xy - 5y^2) + x^2 - 27xy =$

$= 3(2x^2 + 9xy - 5y^2) + x^2 - 27xy = 6x^2 + 27xy - 15y^2 + x^2 - 27xy =$

$= 7x^2 - 15y^2$

7 $a_1 = 2, a_5 = 32$

$s_5 = (a_1 + a_5) \cdot \frac{5}{2} = (2 + 32) \cdot \frac{5}{2} = 85$

8 $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm

$\Delta MNP \sim \Delta ABC \rightarrow m = ka, n = kb, p = kc$

$^{o}\Delta MNP = m + n + p = 84$ cm

$13k + 14k + 15k = 84$

$42k = 84$

$k = 2$ a nejdelší strana je $p = 30$ cm

Nejdelší strana má délku 30 cm.

9 $4(x + 2)^2 = 5$

$(x + 2)^2 = \frac{5}{4}$

$|x + 2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x + 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{2}$

10 $0{,}2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0 \; /+200$

$0{,}2 \cdot 10^{4x-7} = 200 \; /:0{,}2$

$10^{4x-7} = 1\,000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

11 $\cos\left(\frac{8\pi x}{6}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\pi x}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $\frac{8\pi x}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11}{8} + \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

Pro $k = -1 x_1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{8},\ x_2 = \frac{11}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8} > -\frac{11}{8}$

12 $S = S_P + S_{Pl} = a^2 + 4S_{\Delta BCV}$

$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

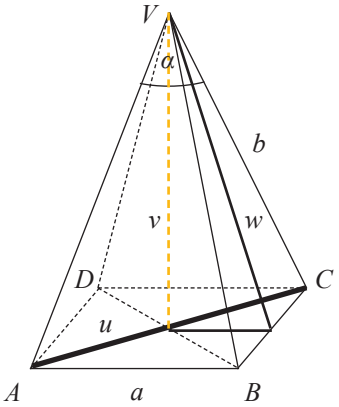
$S_P = a^2 = \frac{u^2}{2} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{2}\ \text{cm}^2 = 16\ \text{cm}^2$

$a = 4$ cm

$\alpha = 60°$, proto trojúhelník ACV je rovnostranný, tedy $b = u$

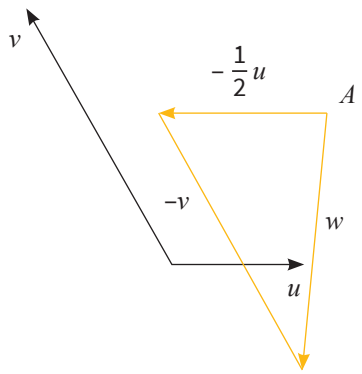
$S_{\Delta BCV} = \frac{aw}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{32-4}}{2}\ \text{cm}^2 = \frac{4\sqrt{28}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{7}\ \text{cm}^2$

$S = (16 + 4 \cdot 4\sqrt{7})\ \text{cm}^2 = (16 + 16\sqrt{7})\ \text{cm}^2$ ($\doteq 58{,}3\ \text{cm}^2$)

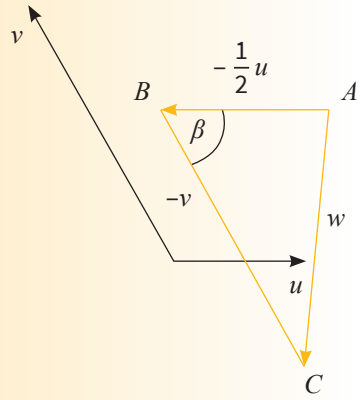


Povrch pravidelného jehlanu tvoří čtvercová podstava a plášť ze čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků.

13 13.1.



Pro výpočet velikosti nalezeného vektoru použijeme kosínovou větu pro trojúhelník ABC.



13.2.

$\beta = 180° - 120° = 60°$

$|w|^2 = \left|-\frac{1}{2}u\right|^2 + |-v|^2 - 2\left|-\frac{1}{2}u\right| \cdot |-v| \cos\beta =$

$= \frac{25}{4} + 16 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \cos 60° = \frac{25}{4} + 16 - 10 = \frac{49}{4}$

$|w| = \frac{7}{2} = 3{,}5$

14 $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 - \frac{27}{64} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{16} = \frac{5}{4}$

Využijeme rovnost

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 2 +$

$+ \sin\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2 + \sin$

$\alpha \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$a \cos^2\alpha = \frac{7}{16}$, proto

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$2 + \sin\alpha = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

15 $V(x) + V(-18 - x) = \frac{x(-18 - x)}{x + 9} + \frac{(-18 - x)(-18 + 18 + x)}{-18 - x + 9} = \frac{x(-18 - x)}{x + 9} + \frac{(-18 - x) \cdot x}{-x - 9} = 0$

$x \neq 9$

$V(-18 - x) = \frac{(-18 - x) \cdot (-18 - (-18 - x)}{(-18 - x) + 9} \quad \frac{(-18 - x) \cdot x}{-x - 9}$

16 16.1. N
16.2. A
16.3. N
16.4. A

Průměrná výška ve skupině:

$\bar{h} = \frac{168 + 172 + 179 + 180 + 190}{5}$ cm = 177,8 cm

$\bar{h}^1 = \frac{168 + 190}{2}$ cm = 174 cm

17 C Pro $q = 1{,}5$

Pro $q = 0{,}25$ platí: $a_2 = \frac{a_1}{4}$, $a_3 = \frac{a_1}{16}$, není splněna trojúhelníková nerovnost. ($a_2 + a_3 < a_1$). Analogicky pro $q = 0{,}5$ a pro $q = 2$.

Pro $q = 1{,}5$ je $a_2 = \frac{3}{2} a_1$, $a_3 = \frac{9}{4} a_1$,

$a_1 + a_2 = \frac{5}{2} a_1 > a_3 = \frac{9}{4} a_1$,

$a_1 + a_3 = \frac{13}{4} a_1 > a_2 = \frac{3}{2} a_1$,

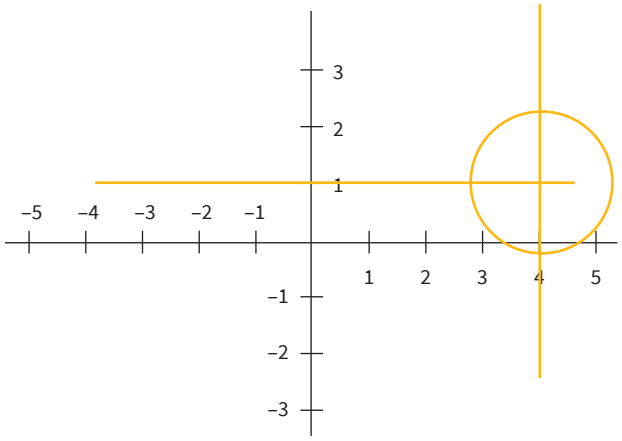
$a_2 + a_3 = \frac{15}{4} a_1 > a_1$

18 B $\frac{1}{6}$

V dané množině je 5 druhých mocnin: 1; 4; 9; 16; 25.

$P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

19 E $p \in (13; 16)$



Vzdálenost středu S od osy x je 1. Tzn. že při r = 1 by osa byla tečnou a při r > 1 bude sečnou, tj. budou existovat dva průsečíky.
Podobně využijeme vzdálenost středu S od osy y, ta je 4, tj. při r = 4 bude tečnou s jediným průsečíkem. Žádný průsečík nastane pro r < 4. Řešíme tedy soustavu nerovnic
$17 - p < 4 \wedge 17 - p > 1 \rightarrow p > 13 \wedge$
$\wedge\, p < 16$
$p \in (13; 16)$

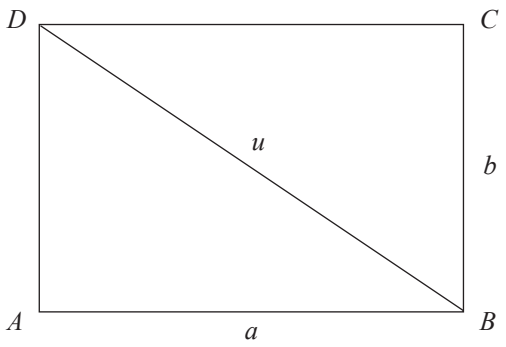
20 D $5x - 4y - 17 = 0$

$v \perp a \rightarrow a: 5x - 4y + c = 0$

$S \in a \rightarrow 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + c = 0 \rightarrow c = -17$

$a: 5x - 4y - 17 = 0$

21 A 16,86 cm²



$S = a \cdot b$

$u^2 = a^2 + b^2$

$u^2 = (u - 3)^2 + 5{,}3^2$

$0 = -6u + 9 + 28{,}09$

$6u = 37{,}09$

$u \doteq 6{,}182$ cm, $a \doteq 3{,}182$ cm

$S = 5{,}3 \cdot 3{,}182\ \text{cm}^2 \doteq 16{,}86\ \text{cm}^2$

22 D 20,51 %

Běžná cena oběda: (85 + 199) Kč = 284 Kč

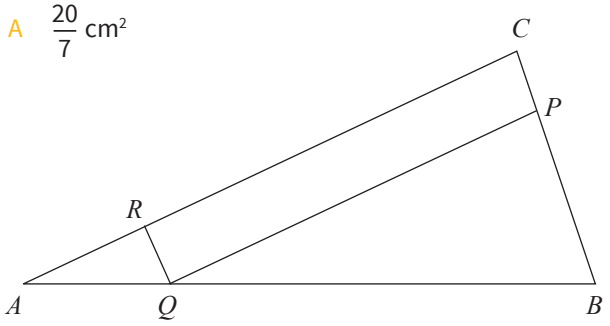
Cena oběda v akci:

$0{,}9 \cdot 85 + 0{,}75 \cdot 199$ Kč = 225,75 Kč

$\frac{225{,}75}{284} \doteq 0{,}794\,9$

100 % – 79,498 % = 20,51 %

23 A $\frac{20}{7}$ cm²



$\Delta ABC \sim \Delta AQR$ s koeficientem podobnosti $\frac{2}{7}$, protože $|AQ| = \frac{2}{7}|AB|$

$S_{\Delta AQR} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 S_{\Delta ABC} = \frac{4}{49} \cdot 35\ \text{cm}^2 = \frac{20}{7}\ \text{cm}^2$

24 A 0

$$\frac{x^2 - 9}{(3x^2 + 9x)(x - 3)^2} = 0$$

$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$

Zlomek je roven nule jedině tehdy, když je čitatel roven nule: $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, žádné z těchto čísel nevyhovuje podmínkám.

$K = \emptyset$

25 25.1 A

$o = 2\pi r \rightarrow r = \frac{o}{2\pi} \rightarrow r = 1$, $V = \pi r^2 \cdot v = 2\pi \cdot 1\ \text{cm}^3 \doteq 6{,}28\ \text{cm}^3$

25.2 C

$S = 4\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$, tedy $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{20}{4\pi}}\right)^3 \text{cm}^3 \doteq 8{,}4\ \text{cm}^3$

25.3 E

$V\ \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\ \text{cm}^3 \cdot 9{,}2\ \text{cm}^3$

25.4 D

$V = S_p \cdot v = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot b = \frac{1{,}5^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{4}\ \text{cm}^3 \doteq 8{,}7\ \text{cm}^3$

26 26.1 D

Poslední dvojčíslí musí být dělitelné 4: 12; 32; 52, ke každému dvojčíslí lze připojit libovolnou dvojčlennou variaci ze zbylých tří číslic

$x = 3 \cdot V_2(3) = 3 \cdot 6 = 18$

26.2 C

Na pozici jednotek nutné umístit 5, počet obsazení zbylých pozic určíme s užitím kombinatorického pravidla součinu $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ale záměnou stejných dvojek nové číslo nedostaneme, proto 24 je nutno dělit dvěma. $24 \cdot 2 = 12$

26.3 A

Číslo musí být dělitelné dvěma i třemi.

Pro dělitelnost třemi použijeme ciferný součet. Součet čtyř čísel z kartiček bude dělitelný třemi jen výběrem číslic 2; 2; 3; 5. Z vybraných číslic tvoříme uspořádané skupiny, na pozici jednotek musí být dvojka. Jejich počet určíme užitím pravidla součinu: $x = 3 \cdot 2 = 6$

ŘEŠENÍ

(VERZE 2017)

ŘEŠENÍ – ČÍSELNÉ OBORY

1 $\frac{20\cdot 72\cdot 225}{25\cdot 36}=\frac{2\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{5\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{2^5\cdot 3^4\cdot 5^3}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$

Důraz klademe na krácení, poté rozložíme na součin mocnin prvočísel a využijeme věty o počítání s mocninami.

2 $n(10, 12, 15) = 60$
Krychle bude mít hranu dlouhou 60 cm.

60 : 10 = 6
60 : 12 = 5
60 : 15 = 4

Do krychle se vejde 6 · 5 · 4 = 120 krabiček.

Představíme si kvádry, které jsou seskládány do krychle. Vypočítáme délku hrany krychle pomocí nejmenšího společného násobku délek hran kvádru. Dopočítáme počet krabiček.

3 Součin čísel 12 a 25 je 2 · 2 · 3 · 5 · 5.
Toto číslo je dělitelné čísly 2, 3 a 5 a kombinacemi jejich součinů.
Mezi prvočiniteli není číslo 7.

A) Číslo n je dělitelné 6 nebo 15.
B) Číslo n je násobkem čísel 10, 20 a 30.
C) Číslo n není dělitelné 8 a 9.
D) Číslo n je násobkem čísel 4 a 7.
E) Číslo n je nejmenší společný násobek čísel 12 a 25.

Rozlišujeme mezi pojmy dělitel a násobek. Pozn. A) číslo 15 není dělitelem čísla 12 ani čísla 25, je dělitelem jejich součinu.

4

		A	N
4.1	2 je prvočíslo.	■	□
4.2	Číslo složené je součinem prvočísel.	■	□
4.3	Je-li číslo dělitelné 12, musí být dělitelné 3.	□	■

Rozlišujeme mezi prvočísly a čísly složenými.

5

5.1 15 = 3 · 5; 20 = 2 · 2 · 5; n(15; 20) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60

5.2 150 = 2 · 3 · 5 · 5; 180 = 2 · 2 · 3 · 3 · 5; D(150; 180) = 2 · 3 · 5 = 30

5.3 10 = 2 · 5; 25 = 5 · 5; n(10; 25) = 2 · 5 · 5 = 50

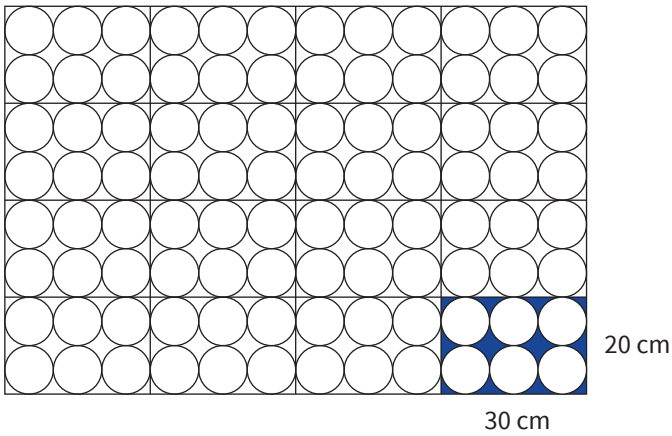
5.4 100 = 2 · 2 · 5 · 5; 160 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5; D(100; 160) = 2 · 2 · 5 = 20

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50
F) 60

5.1. **F**
5.2. **C**
5.3. **E**
5.4. **B**

Ověřujeme znalost výpočtu nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

6 Krabice lze na paletu umístit po celé délce i šířce (na orientaci nezáleží). Na paletě je $6 \cdot 16 = 96$ koulí.



Rozměr a počet krabic nemají pro výpočet zásadní smysl. Slouží pouze pro upevnění koulí a vizualizaci úlohy. Určíme počet koulí, které lze umístit do jedné krabice (známe poloměr koule) a vynásobíme počtem krabic.

7 Průměrná hodnota $\frac{8+6+5+5+6}{5}\,°C = \frac{30}{5}\,°C = 6\,°C$

Den	Po	Út	St	Čt	Pá
Rozdíl teplot	8 °C	6 °C	5 °C	5 °C	6 °C

Určíme rozdíl mezi minimální a maximální teplotou. Pozor na správné odečtení, rozdíly musí být kladné.

8 $\frac{(-1)\cdot|-2|}{(-3)} \cdot \frac{(-5+4)}{|-5+4|} = \frac{(-1)\cdot 2}{(-3)} \cdot \frac{(-1)}{1} = -\frac{2}{3}$

A) $\frac{2}{3}$

B) -2

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) $-\frac{2}{3}$

Důraz klademe na správné odstranění absolutních hodnot. Zejména u druhého zlomku může vést nerozlišení závorek ke špatnému krácení zlomku. Po odstranění absolutních hodnot je třeba správně určit znaménko výsledku.

9

9.1 Čísla nezáporná – nula + kladná, opačná čísla nekladná – nula + záporná. A ■ N □

9.2 Součin lichého počtu záporných čísel je záporný. A □ N ■

9.3 Odečteme-li od menšího čísla větší číslo, výsledek je záporný. A □ N ■

Klademe důraz na správné přečtení zadání.

9.1 Rozlišíme pojmy kladné a nezáporné číslo (resp. záporné a nekladné číslo).

9.2 Použijeme pravidlo pro určení znaménka součinu lichého počtu záporných činitelů.

10 10.1 $(-2) + 3 = 1$

10.2 $-2 \cdot (-1)^2 = -2$

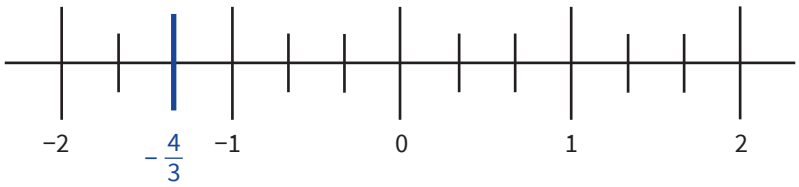
10.3 $(-2) \cdot (-1^2) = 2$

10.4 $(-3) - (-2) = -1$

A)	−1	10.1	**D**
B)	−2	10.2	**B**
C)	−5	10.3	**E**
D)	1	10.4	**A**
E)	2		
F)	5		

Nejdříve správně odstraníme závorky.
V úloze 10.2 a 10.3 je dobře vidět rozdíl mezi $(-1)^2 = 1$ a $(-1)^2 = -1$.
Úlohu 10.4 lze řešit jako rozdíl dvou záporných čísel nebo po odstranění závorek $-3 + 2 = -1$.

11 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$



Zapíšeme text úlohy pomocí číselného výrazu. Výsledný zlomek zkrátíme a hodnotu znázorníme na číselné ose. Číselná osa pomáhá vyznačit správný počet třetin.

12 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{2}{3}+2}{2} = \dfrac{1}{\frac{2+1}{2}} + \dfrac{\frac{2+6}{3}}{2} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} + \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

13 35 ... 100 % ⇒ 50 ... 143 % – změna + 43 %

A) Zvětšil se na 90 %.
B) Zvětšil se o 50 %.
C) Nezměnil se.
D) Zvětšil se o 43 %.
E) Zvětšil se o 15 %.

Klíčové je správně určit, co je základ tedy, kolik je 100 %. Řešíme pomocí trojčlenky nebo také výpočtem 1 %.

14 14.1 12 395 ≐ 12 000 — A ■ N □

14.2 na stovky 12 395 ≐ 12 400 — A ■ N □
na desítky 12 395 ≐ 12 400

14.3 12 395 = 12 395 – zůstane stejné — A □ N ■

V úloze 14.2 porovnáme oba výsledky zaokrouhlení.
Úloha 14.3 může vést ke zmatení při nesprávné formulaci „5 zaokrouhluje nahoru“.
Správně se číslice 5 na místě jednotek zaokrouhluje podle 0 na místě desetin dolů, tedy zůstává beze změny.

15 15.1 $S' = 1{,}5a \cdot 1{,}5b = 2{,}25ab = 2{,}25S = S + 1{,}25S$

15.2 $C' = 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot C) = 0{,}75 \cdot C$

15.3 $l' : l = 5 : 10 \Rightarrow l' = \frac{5}{10} \cdot l = 0{,}5 \cdot l$

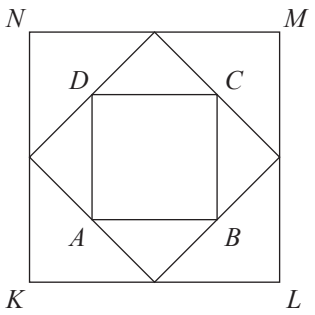
15.4 1 hod = 60 min ... 100 % ⇒ 75 min ... 125 % – změna 25 %

Úloha 15.1 může vést k nesprávné úvaze, že po prodloužení délek stran obdélníku o 50 % se o 50 % zvětší i jeho obsah.
Úloha 15.2 je obměnou typické úlohy, ve které žák správně určí odlišné základy při zdražení a následné slevě. V úloze není vyjádřen číselně počet procent, ale slovní vyjádření polovina.
V úloze 15.4 žák nejprve převede základ 1 hod na 60 minut.

A)	25 %	15.1.	**E**
B)	50 %	15.2.	**C**
C)	75 %	15.3.	**B**
D)	100 %	15.4.	**A**
E)	125 %		
F)	175 %		

16 Platí pro každé reálné číslo.

17 Poměr délek stran čtverců $|AB| : |KL| = 1 : 2$, poměr obsahů čtverců $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 1 : 4$.



Z obrázku je zřejmé, že délka strany nejmenšího čtverce je polovina délky strany největšího čtverce. Po dosazení získáme poměr obsahů 1 : 4. Obrázek může vést ke klamnému dojmu, že menší čtverec je „poloviční“ a k nesprávnému výsledku 1 : 2. (Lze řešit také použitím Pythagorovy věty.)

18 **První obdélník** má poměr stran 4 : 3 = 16 : 12. Kratší strana se zmenší z 12 na 9, tedy o 3.

Druhý obdélník má poměr stran 16 : 9. Proto

12 ..... 100 %
3 ..... x %.

Přímou úměrností pak získáme pro neznámou x hodnotu 25 %.

Žáci mohou být zmateni uvedením dvou různých poměrů a otázkou na procentuální změnu jednoho členu. Odpověď D) může vycházet z úvahy, že 3 je 33 % z 9. Nejjednodušší interpretace řešení pomocí rozšíření původního poměru stran je v ilustrativním řešení.

A) 22,5 %
B) 25 %
C) 30 %
D) 33 %
E) 56 %

19 19.1 Převrácené číslo dostaneme záměnou čitatele a jmenovatele, znaménko se nezmění. A ☐ N ■

19.2 Absolutní hodnota nuly je nula, správné tvrzení je, že absolutní hodnota je nezáporná. A ☐ N ■

19.3 Druhá mocnina jakéhokoliv čísla nemůže být číslo záporné. A ■ N ☐

Úloha 19.1 může vést na záměnu pojmu převráceného a opačného čísla. Opačná hodnota kladného čísla je číslo záporné, převrácená ne. Úloha 19.2 vede k nerozlišení pojmu kladných a nezáporných čísel. Správná odpověď vychází z definice absolutní hodnoty $|x| \geq 0$. Úloha 19.3 může vést podobně k nesprávnému tvrzení, že druhá mocnina je vždy číslo kladné. Druhá mocnina nuly je nula (tj. číslo nezáporné).

20 20.1 $(\sqrt{2})^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

20.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

20.3 $-\sqrt{4} = -2$

20.4 $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

A) -2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

D) 2

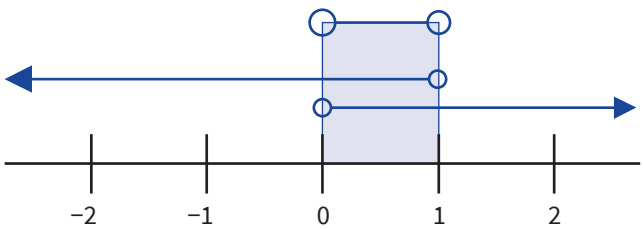
E) 4

F) neexistuje

20.1	**E**
20.2	**D**
20.3	**A**
20.4	**C**

Úloha ověřuje správnou znalost mocnin s racionálním exponentem.

21



Kladná čísla jsou čísla větší než nula (např. 0,2; 1,1; ...).

22 $A = R_0^+/\{1\}$ nebo $A = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Žák nemusí správně interpretovat tvrzení „neobsahuje záporná čísla“ jako „obsahuje pouze čísla nezáporná“, a tedy množina obsahuje číslo nula. Nesprávné tvrzení o obsahu pouze kladných čísel může být spojeno s další nesprávnou úvahou, že množina čísel kladných začíná od jedné (viz úloha 21). Spojení těchto dvou chyb může vést k nesprávnému řešení $A = (1; \infty)$.

23 $M = [(2; \infty) \cap (-\infty; 5)] \cup (-1; 2\rangle = (2; 5) \cup (-1; 2\rangle = (-1; 5)$

A) $(-1; 2)$
B) $(-\infty; \infty)$
C) $(-\infty; 2\rangle$
D) $\langle -1; 5\rangle$
E) $(-1; 5)$

Úloha ověřuje znalosti významu sjednocení a průniku množin. Úlohu lze řešit také graficky znázorněním intervalů A, B a C na číselné ose.

24

		A	N
24.1	$Z^+ \subset R^+ \Rightarrow Z^+ \cap R^+ = Z^+$	■	□
24.2	$(-1; +1) \subset \langle -1; +1\rangle$	□	■
24.3	$N \subset R$	■	□

Úlohy 24.1 a 24.3 ověřují znalosti číselných množin. V úloze 24.2 je ověření pochopení rozdílu mezi otevřeným a uzavřeným intervalem a znalost jejich zápisu.

25 **Přiřaďte ke každé množině správný interval.**

25.1 $R^+ = (0; \infty)$

25.2 $R^- \cap R^+ = \emptyset = (0; 0)$

25.3 $R_0^- \cup R_0^+ = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 0; \infty) = (-\infty; \infty)$

25.4 $R_0^- \setminus \{0\} = R^- = (-\infty; 0)$

A) $(1; \infty)$
B) $(0; 0)$
C) $(-\infty; \infty)$
D) $\langle 0; 0\rangle$
E) $(-\infty; 0)$
F) $(0; \infty)$

25.1	**F**
25.2	**B**
25.3	**C**
25.4	**E**

V úloze se ověřuje správné pochopení pojmů množina kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel a jejich zápisů. Odpověď A) opět vede k nesprávné úvaze o množině kladných čísel (viz úlohy 21 a 22).

ŘEŠENÍ – ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

1 Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\\[2ex] x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+3}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{4}-1+3}{\frac{1+2}{2}}=\frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+2\cdot 4}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1+8}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

2 Pro jednodušší určení hodnoty výrazu je vhodné výraz nejprve upravit převedením na společný jmenovatel.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2-2x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$$

Určit hodnotu výrazu znamená, že do výrazu dosadíme za proměnnou x příslušné číslo, tj. nejprve −3 a potom 1.

$$A=-\frac{4(-3)}{(-3)^2-4}=-\frac{-12}{9-4}=\frac{12}{5}$$

$$B=-\frac{4\cdot 1}{1^2-4}=-\frac{4}{1-4}=\frac{4}{3}$$

Vypočteme podíl $\frac{A}{B}$ a zjistíme, o kolik procent je hodnota A větší než hodnota B.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\cancel{12}^{3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Hodnota A je 1,8násobkem hodnoty B, je tedy o 80 % větší.

Nebo je možno použít trojčlenku...

$\frac{4}{3}$ ..... *100 %*

$\frac{12}{5}$ ..... *x %*

x = 180 %

... tedy o 80% větší.

3 Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna 2, tzn. že celý výraz položíme roven 2 a řešíme příslušnou rovnici. Nesmíme zapomenout na to, že se jedná o výraz s neznámou ve jmenovateli, a musíme určit jeho definiční obor.

$$x^2-x-6\neq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1\neq\frac{1+5}{2}\Rightarrow x_1\neq 3$$

$$x_2\neq\frac{1-5}{2}\Rightarrow x_2\neq -2$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$

$$x^2-2x-3=2(x^2-x-6)$$

$$x^2-2x-3=2x^2-2x-12$$

$$-x^2=-9$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

Výraz nabývá hodnoty 2 pro $x=\pm 3$, ale hodnota $x=3$ nevyhovuje jeho definičnímu oboru.
Výraz tedy nabývá hodnoty 2 jen pro $x=-3$.

4 Zadané údaje si přehledně zobrazíme v tabulce. Je-li celkový počet sedadel p a v kategorii A je 30 % z těchto sedadel, je tento počet $0{,}3p$. Obdobně vyjádříme počty ve zbývajících kategoriích. Jestliže lístek v kategorii A stojí x Kč a v kategorii B o polovinu více, je jeho cena v kategorii B $(x + 0{,}5x)$ Kč, obdobně vypočteme také cenu lístku v kategorii C. Vynásobením počtu sedadel v jednotlivých kategoriích cenou lístku za jedno sedadlo v této kategorii získáme celkovou tržbu za kategorii. Tyto tři hodnoty sečteme a dostaneme vzorec pro výpočet tržby v kinosále.

	počet sedadel	**cena za jedno sedadlo**	**celková tržba za kategorii**
kategorie A	$0{,}3p$	x	$0{,}3px$
kategorie B	$0{,}5p$	$x + 0{,}5x$	$0{,}5p(x + 0{,}5x)$
kategorie C	$0{,}2p$	$2(x + 0{,}5x)$	$0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x)$

$0{,}3px + 0{,}5p(x + 0{,}5x) + 0{,}2p \cdot 2(x + 0{,}5x) = 0{,}3px + 0{,}5px + 0{,}25px + 0{,}4px + 0{,}2px = 1{,}65px$ D)

5 Všechny tři uvedené výrazy obsahují jmenovatel, který musí být různý od nuly. Stanovíme, pro která x nejsou výrazy definovány.

5.1

$\frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ B)

5.2

$\frac{x - 1}{\frac{x}{x + 1}} \Rightarrow x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1$ D)

5.3

$\frac{x + 1}{\frac{x - 1}{x}} \Rightarrow x - 1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 0$ C)

6 Při úpravě výrazu využijeme vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a^2 - 2)^2 - (4 - a^2)^2 - 4 = \left[(a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2 + 2^2\right] - \left[4^2 - 2 \cdot 4 \cdot a^2 + (a^2)^2\right] - 4 = a^4 - 4a^2 + 4 - (16 - 8a^2 + a^4) - 4 =$

$= a^4 - 4a^2 + 4 - 16 + 8a^2 - a^4 - 4 = 4a^2 - 16 = 4(a^2 - 4) = 4(a - 2)(a + 2)$

7 Při úpravě tohoto výrazu využijeme vzorců $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$(a + 2)^3 + (a - 2)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 + a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 - 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 - 6a^2 + 12a - 8 =$

$= 2a^3 + 24a = 2a(a^2 + 12)$

8 $3a^2x - 6ax - 2a^2y + 4ay = 3ax(a-2) - 2ay(a-2) = (a-2)(3ax - 2ay) = a(a-2)(3x-2y)$

9 Pro určení správného vztahu mezi zadanými mnohočleny je potřeba mnohočleny vydělit, tj. provést dělení $A(x):B(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - x - 6):(x^2 + x - 3) = x + 2 \\
\underline{-x^3 - x^2 + 3x} \\
\quad 2x^2 + 2x - 6 \\
\quad \underline{-2x^2 - 2x + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

B) $A(x) = (x+2)\cdot B(x)$

10 10.1 A N

Postupujeme dle vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, kde $a = x$ a $b = \frac{1}{x}$.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

10.2 A N

$$(3x+3)^2 + (4x+4)^2 = 9x^2 + 18x + 9 + 16x^2 + 32x + 16 = 25x^2 + 50x + 25 = (5x+5)^2$$

10.3 A N

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$$

10.4 A N

$$(x+2)^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 5 = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

11 Výraz $A(x)$ vyjádříme pomocí algebraických operací jako neznámou ze vzorce.

$$\left[(x+2)^2 - A^2(x)\right]^2 = 36x^2 + 36x + 9$$

$$\left[x^2 + 4x + 4 - A^2(x)\right]^2 = (6x+3)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - A^2(x) = 6x + 3$$

$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 3 = A^2(x)$$

$$x^2 - 2x + 1 = A^2(x)$$

$$(x-1)^2 = A^2(x)$$

$A(x) = x - 1$ D)

12 $\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)=\frac{x(x-2)+x(x+2)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x\cdot x-4}{x}=\frac{x^2-2x+x^2+2x}{\cancel{x^2-4}}\cdot\frac{\cancel{x^2-4}}{x}=\frac{2\cancel{x^2}^{2x}}{\cancel{x}}=2x$

podm.: $x\neq\pm2;\ x\neq0$

13 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)=\left[\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{a-1-2a}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{-a-1}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-a}{a}=$

$=\frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{-\cancel{(a-1)}}{a}=\frac{1}{a}$

podm.: $a\neq\pm1;\ a\neq0$

14 $\frac{1+\frac{1}{a-2}}{a-\frac{1}{2-a}}=\frac{\frac{a-2+1}{a-2}}{\frac{a(2-a)-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{2a-a^2-1}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{\frac{-(a^2-2a+1)}{2-a}}=\frac{\frac{a-1}{a-2}}{-\frac{(a-1)^2}{2-a}}=\frac{\cancel{a-1}}{\cancel{a-2}}\cdot\left[-\frac{\cancel{2-a}}{\cancel{(a-1)^2}^{1-a}}\right]=\frac{1}{a-1}$

podm.: $a\neq1;\ a\neq2$

15 $1+\frac{1}{1+\frac{1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a-1+1}{a-1}}=1+\frac{1}{\frac{a}{a-1}}=1+\frac{1}{1}\cdot\frac{a-1}{a}=1+\frac{a-1}{a}=\frac{a+a-1}{a}=\frac{2a-1}{a}$ B)

16 Výraz není definován pro takové $x\in\mathbb{R}$, pro které je jmenovatel roven nule. Upravíme tedy jednotlivé jmenovatele a stanovíme příslušné podmínky.

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x}}\Rightarrow1+\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq-2\wedge x\neq0$

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1+\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2+2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+4}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq-4\wedge x\neq-2$

$\frac{x+2}{1+\frac{4}{x-2}}\Rightarrow1+\frac{4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x-2+4}{x-2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2}{x-2}\neq0\Rightarrow x\neq\pm2$ C)

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x+2}}\Rightarrow1-\frac{2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x+2-2}{x+2}\neq0\Rightarrow\frac{x}{x+2}\neq0\Rightarrow x\neq0\wedge x\neq-2$

$\frac{x-2}{1-\frac{2}{x}}\Rightarrow1-\frac{2}{x}\neq0\Rightarrow\frac{x-2}{x}\neq0\Rightarrow x\neq2\wedge x\neq0$

17 Oba výrazy nejprve upravíme:

$$A(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$$B(a) = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

17.1 A N

$$\frac{A(a)}{B(a)} = \frac{\frac{2a}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}} = \frac{2\cancel{a}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \cdot \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} = \frac{2}{a-1}$$

17.2 A N

$$\frac{B(a)}{A(a)} + 1 = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{2a}{a^2-1}} + 1 = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a+1}} \cdot \frac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{2\cancel{a}} + 1 = \frac{a-1}{2} + 1 = \frac{a-1+2}{2} = \frac{a+1}{2}$$

17.3 A N

$$A(a) - B(a) = \frac{2a}{a^2-1} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{3a-a^2}{a^2-1}$$

17.4 A N

$$A(a) + B(a) = \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a+1} = \frac{2a + a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} = \frac{a}{a-1}$$

18 $$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}+1}} + \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$$

popř.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1) + (x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$$

19 $$(\sqrt{x})^{-1} + (\sqrt{x})^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{x\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x}+x}{x \cdot x} = \frac{\cancel{x}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x^2}} = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$$

20 $\sqrt{x}+\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad /\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x}+1=2 \qquad /-1$$

$$\sqrt{2x}=1 \qquad /^2$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad \text{C)}$$

21 Při úpravě výrazu využijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Výraz nejprve upravíme a poté dosadíme:

$$V(a,b)=(a^{-16}b^{4})^{\frac{1}{8}}=a^{\overset{-2}{\cancel{-16}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}b^{\underset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}}=a^{-2}b^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{b}}{a^2}$$

$$V(\sqrt{5},25)=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}^2}=\frac{5}{5}=1 \qquad \text{A)}$$

22 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

22.1

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2-x}}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1 \\ 2-x>0\Rightarrow 2>x \end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\langle -1;2) \qquad \text{E)}$$

22.2

$$\frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow 4-x^2>0\Rightarrow x^2<4\Rightarrow |x|<2\Rightarrow x\in(-2;2) \qquad \text{D)}$$

22.3

$$\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\Rightarrow\frac{x+2}{x+1}\geq 0$$

$$(x+2\geq 0\wedge x+1>0)\vee(x+2\leq 0\wedge x+1<0)$$

$$(x\geq -2\wedge x>-1)\vee(x\leq -2\wedge x<-1)$$

$$x\in(-1;\infty) \qquad x\in(-\infty;-2\rangle$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty;-2\rangle\cup(-1;\infty) \qquad \text{A)}$$

ŘEŠENÍ – ROVNICE A NEROVNICE

1 Jestliže jsou zadané uspořádané dvojice řešením příslušné rovnice, musí jejich *x-ová* a *y-ová* souřadnice této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že do rovnice dosadíme za x a y souřadnice uvedené u konkrétních uspořádaných dvojic a vypočteme hodnoty a a b. Vždy je potřeba si uvědomit, že první souřadnici dosazujeme za x a druhou za y.

$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [3; a] \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot a = 5 \Rightarrow 9 + 2a = 5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$
$3x + 2y = 5 \wedge [x, y] = [b; 4] \Rightarrow 3 \cdot b + 2 \cdot 4 = 5 \Rightarrow 3b + 8 = 5 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$
$a \cdot b = (-2) \cdot (-1) = 2$

2 Řešit zadanou rovnici je velice komplikované, a proto je vhodné zvolit rychlejší metodu řešení uvedené úlohy, která spočívá v tom, že provedeme zkoušku.

$$x = 10 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 10): \dfrac{10^2 - 3}{\sqrt{10 - 1}} = \dfrac{100 - 3}{\sqrt{9}} = \dfrac{97}{3} = 32\,\dfrac{1}{3} \\ P\,(x = 10): \dfrac{10}{2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 10) \neq P\,(x = 10)$$

$$x = 5 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 5): \dfrac{5^2 - 3}{\sqrt{5 - 1}} = \dfrac{25 - 3}{\sqrt{4}} = \dfrac{22}{2} = 11 \\ P\,(x = 5): \dfrac{5}{2} = 2{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 5) \neq P\,(x = 5)$$

$$x = 4 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 4): \dfrac{4^2 - 3}{\sqrt{4 - 1}} = \dfrac{16 - 3}{\sqrt{3}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}} \\ P\,(x = 4): \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 4) \neq P\,(x = 4)$$

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 2): \dfrac{2^2 - 3}{\sqrt{2 - 1}} = \dfrac{4 - 3}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ P\,(x = 2): \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow L\,(x = 2) = P\,(x = 2)$$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} L\,(x = 1): \dfrac{1^2 - 3}{\sqrt{1 - 1}} = \dfrac{1 - 3}{\sqrt{0}} \quad \text{výraz není definován} \\ P\,(x = 1): \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pro } x = 1 \text{ rovnice není definována}$$

Z provedené zkoušky plyne, že řešením rovnice je $x = 2$. D)

3 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Vzhledem k tomu, že počet dívek neznáme, označíme jej proměnnou x. V rovnici je na levé straně počet všech prospívajících studentů v devátých třídách (počet dívek plus počet chlapců) a na pravé straně 96 % z celkového počtu všech žáků v devátých třídách.

počet všech dívek v devátých třídách x
počet všech chlapců v devátých třídách 35

$$\begin{aligned} 32 + x &= 0{,}96\,(x + 35) \\ 32 + x &= 0{,}96x + 33{,}6 && / -0{,}96x - 32 \\ 0{,}04x &= 1{,}6 && / : 0{,}04 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Do deváté třídy chodí 40 dívek.

4 Jedná se o slovní úlohu, kterou budeme řešit užitím rovnice. Hmotnost vody v sudu označíme x. 20 % hmotnosti vody ($0{,}2x$) třetina zbytku

hmotnost vody v sudu x

$$135 - 0{,}2x - \frac{1}{2} \cdot 0{,}8x = 79 \qquad / \cdot 3$$
$$405 - 0{,}6x - 0{,}8x = 237 \qquad / \cdot -405$$
$$-1{,}4x = -168 \qquad / : (-1{,}4)$$
$$x = 120$$

Původně bylo v sudu 120 kg vody.

5 Jedná se o úlohu zaměřenou na výpočet neznámé ze vzorce. U úloh tohoto typu postupujeme stejně jako u úloh zaměřených na řešení rovnic.

$$l = l_1\,[1 + \alpha(t - t_1)]$$
$$l = l_1 + l_1\alpha(t - t_1)$$
$$l = l_1 + l_1\alpha t - l_1\alpha t_1 \qquad / -l_1 + l_1\alpha t_1$$
$$l - l_1 + l_1\alpha t_1 = l_1\alpha t \qquad / : l_1\alpha$$
$$\frac{l - l_1 + l_1\alpha t_1}{l_1\alpha} = t$$

6

$$\frac{x}{2} + \frac{x + \frac{x+2}{3}}{3} = 2x - 4 \qquad / \cdot 6$$
$$3x + 2\left(x + \frac{x+2}{3}\right) = 12x - 24$$
$$3x + 2x + \frac{2x+4}{3} = 12x - 24 \qquad / \cdot 3$$
$$9x + 6x + 2x + 4 = 36x - 72$$
$$17x + 4 = 36x - 72 \qquad / -36x - 4$$
$$-19x = -76 \qquad / : (-19)$$
$$x = 4$$

7 7.1 A ☐ N ■

Na levé straně rovnice je zlomek, ve kterém čitatel i jmenovatel obsahují stejný mnohočlen. Na první pohled by toto mohlo vést k mylné úvaze, že po vykrácení získáme na levé straně hodnotu 1 a ta je rovna hodnotě 1 na straně pravé. Řešením by pak byla všechna $x \in R$. Nesmíme ale zapomenout, že výraz na levé straně není definován pro $x = \pm 1$. Tvrzení tedy pravdivé není.

7.2 A ■ N ☐

Upravíme čitatel zlomku na levé straně rovnice užitím vzorce $a^2 - b^2$ a postupnými algebraickými úpravami získáme, že $x = 3$. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 1$$
$$\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 1$$
$$x - 2 = 1 \qquad / + 2$$
$$x = 3$$

7.3 A N

Výrazy na levé a pravé straně rovnice jsou si rovny a jejich definičním oborem jsou všechna $x \in R$. Tvrzení je tedy pravdivé.

7.4 A N

Výraz z pravé strany rovnice převedeme na levou stranu, získáme kvadratickou rovnic a tu vyřešíme. Jejím řešením jsou čísla 3 a −2. Tvrzení je tedy pravdivé.

$$x^2 - 4 = x + 2 \qquad / -x -2$$
$$x^2 - 4 - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

8 Jedná se o řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme řešit některou ze známých metod – sčítací, dosazovací nebo porovnávací. Vypočteme x a y a po jejich dosazení získáme hodnotu hledaného výrazu. Jestliže bychom ale využili jisté obměny sčítací metody, která spočívá v tom, že druhou rovnici vynásobíme 2 a sečteme s rovnicí první, získáme hodnotu výrazu přímo.

$$\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ x - 2y &= -4 \qquad / \cdot 2 \\ \hline 2x + y &= -3 \\ 2x - 4y &= -8 \\ \hline 4x - 3y &= -11 \end{aligned}$$

D)

9 Vzhledem k tomu, že u nabízených odpovědí nejsou uvedeny konkrétní hodnoty proměnné x, nelze nalézt řešení uvedené rovnice pomocí zkoušky. Rovnici je potřeba vyřešit pomocí příslušných algebraických úprav a na základě hodnoty výsledku stanovit správnou odpověď.

$$(x + 3)^2 - 4(x - 1)^2 - 2x = -3(x - 2)^2 + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1) - 2x = -3(x^2 - 4x + 4) + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 - 2x = -3x^2 + 12x - 12 + 6x - 1$$
$$-3x^2 + 12x + 5 = -3x^2 + 18x - 13 \qquad / +3x^2 - 18x - 5$$
$$12x - 18x = -13 - 5$$
$$-6x = -18 \qquad / : (-6)$$
$$x = 3$$

Z výsledku $x = 3$ vyplývá, že správná odpověď je, že x je dělitelem čísla 6. Správná odpověď je C).

10 V tomto případě se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Při řešení těchto typů rovnic je nedílnou součástí řešení také stanovení podmínek existence zadaných zlomků. Řešení provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x+2}{x^2+x} - 1 \qquad \text{podm.: } x \neq 0;\ x \neq -1$$

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x+2}{x(x+1)} - 1 \qquad / \cdot x(x+1)$$

$$2(x+1) - x \cdot x = 3x + 2 - x(x+1)$$

$$2x + 2 - x^2 = 3x + 2 - x^2 - x$$

$$-x^2 + 2x + 2 = -x^2 + 2x + 2 \qquad / -x^2 + 2x + 2$$

$$0 = 0$$

Poslední rovnosti vyhovují všechna reálná čísla. Vzhledem k podmínkám je řešením rovnice $x \in R - \{-1; 0\}$.

11 Jedná se o slovní úlohu řešenou užitím nepřímé úměrnosti. Čím více soustružníků na zakázce pracuje, tím menší dobu k jejímu splnění potřebují. Sestavíme tedy příslušné nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje x hodin, 4 soustružníci pracují o 150 minut déle, tj. $(x + 2{,}5)$ hodin.

4 soustružníci ..... $(x + 2{,}5)$ hodiny
6 soustružníků ..... x hodin

$$\frac{6}{4} = \frac{x+2{,}5}{x} \qquad / \cdot 4x$$

$$6x = 4(x+2{,}5)$$

$$6x = 4x + 10 \qquad / -4x$$

$$2x = 10 \qquad / : 2$$

$$x = 5$$

6 soustružníků vyrobí zakázku za 5 hodin. Dobu, za kterou zakázku vyrobí 10 soustružníků, vypočteme opět užitím nepřímé úměrnosti. 6 soustružníků na zakázce pracuje 5 hodin, 10 soustružníků pracuje y hodin.

6 soustružníků ..... 5 hodin
10 soustružníků ..... y hodin

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{y} \qquad / \cdot 6y$$

$$10y = 30 \qquad / : 10$$

$$y = 3$$

10 soustružníků zakázku vyrobí za 3 hodiny.

12 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li jmenovatel zlomku x, je čitatel zlomku 75 % hodnoty jmenovatele, tj, $0{,}75x$. Jestliže k čitateli a jmenovateli zlomku přičteme číslo 2, bude čitatel zlomku roven 80 % hodnoty jmenovatele, tj. podíl čitatele a jmenovatele zlomku bude roven 0,8.

čitatel původního zlomku ..... $0{,}75x$
jmenovatel zlomku x

$$\frac{0{,}75x+2}{x+2}=0{,}8 \qquad /\cdot(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8(x+2)$$
$$0{,}75x+2=0{,}8x+1{,}6 \qquad /-0{,}8x-2$$
$$-0{,}05x=-0{,}4 \qquad /:(-0{,}05)$$
$$x=8$$

Čitatel původního zlomku je roven 8, jmenovatel je 75 % hodnoty čitatele, tj. 0,75 · 8 = 6.

Zlomek je tedy roven $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

13 Řešení obou rovnic provedeme pomocí příslušných algebraických úprav.

$$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-1}{x+9} \qquad /\cdot(x+3)(x+9);\ \text{podm.: } x\neq-3;\ x\neq-9$$
$$(x-2)(x+9)=(x-1)(x+3)$$
$$x^2+9x-2x-18=x^2+3x-x-3$$
$$x^2+7x-18=x^2+2x-3 \qquad /-x^2-2x+18$$
$$5x=15 \qquad /:5$$
$$x=3$$

$$\frac{y-3}{y+3}=\frac{y-4}{y-1} \qquad /\cdot(y+3)(y-1);\ \text{podm.: } y\neq-3;\ y\neq1$$
$$(y-1)(y-3)=(y-4)(y+3)$$
$$y^2-3y-y+3=y^2+3y-4y-12$$
$$y^2-4y+3=y^2-y-12 \qquad /-y^2+y-3$$
$$-3y=-15 \qquad /:(-3)$$
$$y=5$$

Řešením rovnic jsou čísla $x = 3$ a $y = 5$. Nejmenší společný násobek čísel 3 a 5 je číslo 15 (B).

14 Uvedenou rovnici řešíme pomocí algebraických úprav.

$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x^2-4}+2 \qquad \text{podm.: } x\neq\pm2$$
$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{3}{(x-2)(x+2)}+2 \qquad /\cdot(x-2)(x+2)$$
$$2(x+2)+x(x-2)=3+2(x-2)(x+2)$$
$$2x+4+x^2-2x=3+2(x^2-4)$$
$$x^2+4=3+2x^2-8$$
$$x^2+4=2x^2-5 \qquad /-2x^2-4$$
$$-x^2=-9 \qquad /\cdot(-1)$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm3$$
$$K=\{\pm3\}$$

15 Pomocí diskriminantu (popř. pomocí Vietových vzorců) vypočteme kořeny x_1, x_2 kvadratického trojčlenu na levé straně nerovnice a užitím vzorce $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$ jej rozložíme.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

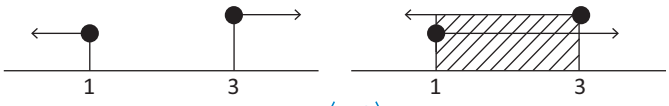
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Výraz $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, jestliže $(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$. Řešíme tedy příslušné nerovnice:

$$(x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0) \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0)$$

$$(x \geq 3 \wedge x \leq 1) \vee (x \leq 3 \wedge x \geq 1)$$

$$x \in \emptyset \vee x \in \langle 1; 3 \rangle$$



$x \in \langle 1; 3 \rangle$

16 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li výšku obdélníku x, je jeho šířka $x + 17{,}5$. Při výpočtu využijeme vzorce pro obsah obdélníku $S = ab$, kde a je šířka a b délka obdélníku.

šířka obdélníku ..... $x + 17{,}5$
délka obdélníku x

$$x(x + 17{,}5) = 375$$

$$x^2 + 17{,}5x - 375 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{306{,}25 + 1500}}{2} = \frac{-17{,}5 \pm \sqrt{1806{,}25}}{2} =$$

$$= \frac{-17{,}5 \pm 42{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17{,}5 + 42{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{-17{,}5 - 42{,}5}{2} = \frac{-60}{2} = -30 \text{ nevyhovuje (délka nemůže být záporná)}$$

Délka obdélníku je 12,5 cm, šířka 12,5 + 17,5 = 30 cm. Úhlopříčku obdélníku vypočteme užitím Pythagorovy věty, tj. $u = \sqrt{12{,}5^2 + 30^2} = \sqrt{156{,}25 + 900} = \sqrt{1056{,}25} = 32{,}5 \text{ cm}$. Úhlopříčka lichoběžníku má délku 32,5 cm.

17 Jedná se o slovní úlohu řešenou pomocí rovnice. Slovní úloha řešená pomocí rovnice by měla obsahovat zápis úlohy, sestavení rovnice a její řešení a slovní odpověď. Označíme-li nejmenší z těchto čísel x (druhá mocnina je x^2), je další $x + 1$ (druhá mocnina je $(x + 1)^2$) a největší $x + 2$ (druhá mocnina je $(x + 2)^2$). Sestavíme příslušnou kvadratickou rovnici a tu vyřešíme.

první číslo x
druhé číslo ..... $x+1$
třetí číslo ..... $x+2$

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 10(x+2)$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 10x + 20$$
$$3x^2 + 6x + 5 = 10x + 20 \qquad / - 10x - 20$$
$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} =$$
$$= \frac{4 \pm 14}{6}$$
$$x_1 = \frac{4 + 14}{6} = \frac{18}{6} = 3$$
$$x_2 = \frac{4 - 14}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \text{ nevyhovuje } (x \text{ je přirozené číslo})$$

Hledaná čísla jsou tedy 3, 4 a 5, jejich součet je 3 + 4 + 5 = 12.

18 Řešení rovnice provedeme pomocí příslušných algebraických úprav. Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou řešíme pomocí diskriminantu.

$$(x+3)^2 - (3x-1)^2 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - (9x^2 - 6x + 1) = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$-8x^2 + 12x + 8 = 0 \qquad / : (-4)$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x_1| = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow |x_2| = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_2| = 4|x_1|$$

Řešením je tedy E.

19 Je-li $x_1 = 3$ řešením rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$, dosadíme tuto hodnotu za x a získáme kvadratickou rovnici pro neznámou b.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ x_1 = 3 \end{array}\right\} 3^2 - 3 - b^2 + 5b = 0 \Rightarrow b^2 - 5b - 6 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$b_1 = \frac{5 - 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Nyní do původní rovnice $x^2 - x - b^2 + 5b = 0$ dosadíme za b buď hodnotu b_1 nebo b_2 (v obou případech získáme stejnou rovnici) a vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x - b^2 + 5b = 0 \\ b_1 = -1 \end{array}\right\} x^2 - x - (-1)^2 + 5(-1) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{2}} = -2$$

$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Druhý kořen kvadratické rovnice je roven −2.
Řešení je tedy B.

20 Při řešení tohoto typu kvadratické rovnice je dobré využít vztahu $\sqrt{x^2} = |x|$. Tím převedeme kvadratickou nerovnici na nerovnici s absolutní hodnotou. Při jejím řešení využijeme definice absolutní hodnoty $|x - a| \leq b$, kdy hledáme taková x, jejichž vzdálenost od čísla a je menší nebo rovna číslu b. Výsledkem je pak interval $\langle a - b; a + b \rangle$.

20.1 $(x - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow |x - 1| \leq 1 \Rightarrow x \in \langle 0; 2 \rangle$ C

20.2 $(x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -3; 1 \rangle$ A

20.3 $(x + 1)^2 \leq 9 \Rightarrow |x - (-1)| \leq 3 \Rightarrow x \in \langle -4; 2 \rangle$ D

22 Každou z nerovnic vyřešíme pomocí algebraických úprav. Jedná se o soustavu dvou nerovnic, kdy požadovaný výsledek musí být řešením obou nerovnic současně, tzn. že z jednotlivých výsledků uděláme průnik. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\begin{aligned} 3(2x - 1) - 2(x + 3) &\leq 5x - 1 \\ 6x - 3 - 2x - 6 &\leq 5x - 1 \\ 4x - 9 &\leq 5x - 1 \qquad / - 5x + 9 \\ 4x - 5x &\leq -1 + 9 \\ -x &\leq 8 \qquad / : (-1) \\ x &\geq -8 \Rightarrow x \in \langle -8; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4x - 3) - 5(x + 2) &\geq 4x - 13 \\ 8x - 6 - 5x - 10 &\geq 4x - 13 \\ 3x - 16 &\geq 4x - 13 \qquad / - 4x + 16 \\ 3x - 4x &\geq -13 + 16 \\ -x &\geq 3 \qquad / : (-1) \\ x &\leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \langle -8; \infty) \\ x \in (-\infty; -3\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle -8; -3 \rangle$$

23 Jedná se o nerovnici v podílovém tvaru. Jmenovatel zlomku upravíme podle vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, stanovíme podmínky řešitelnosti a vykrátíme s čitatelem. Využijeme toho, že zlomek je záporný nebo roven nule tehdy, jestliže čitatel je kladný nebo roven nule a současně jmenovatel záporný, popř. opačně. Čitatel zlomku nabývá hodnoty 1, tj. je kladný, a proto jmenovatel $(x - 1)$ musí být záporný. Při stanovení výsledku nesmíme zapomenout na podmínky.

$$\frac{x+1}{x^2-1} \leq 0 \qquad \text{podm.: } x \neq \pm 1$$

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)(\cancel{x+1})} \leq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$1 \geq 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$$

24 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$2(3x-1) - 3[2(x+4) - 3(x-2)] \leq 7(x-5) + 1$$

$$6x - 2 - 3[2x + 8 - 3x + 6] \leq 7x - 35 + 1$$

$$6x - 2 - 3[-x + 14] \leq 7x - 34$$

$$6x - 2 + 3x - 42 \leq 7x - 34$$

$$9x - 44 \leq 7x - 34 \qquad / -7x + 44$$

$$9x - 7x \leq -34 + 44$$

$$2x \leq 10 \qquad / : 2$$

$$x \leq 5$$

Řešením jsou všechna přirozená čísla, pro která platí, že $x \leq 5$, tj. čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Jejich součet je roven $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
Řešení je tedy D.

25 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

$$\frac{2x - \frac{1}{3}(x+4)}{4} + \frac{3x - \frac{1}{4}(x-2)}{3} \leq \frac{3x+1}{2} \qquad / \cdot 12$$

$$3\left[2x - \frac{1}{3}(x+4)\right] + 4\left[3x - \frac{1}{4}(x-2)\right] \leq 6(3x+1)$$

$$6x - (x+4) + 12x - (x-2) \leq 18x + 6$$

$$6x - x - 4 + 12x - x + 2 \leq 18x + 6$$

$$16x - 2 \leq 18x + 6 \qquad / \cdot -18x + 2$$

$$-2x \leq 8 \qquad / : (-2)$$

$$x \geq -4 \Rightarrow x \in \langle -4; \infty) \qquad \text{(A)}$$

26 Uvedenou nerovnici řešíme pomocí algebraických úprav. Při řešení nerovnic nesmíme zapomenout na to, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se musí znaménko nerovnice změnit na opačné.

26.1
$$\begin{aligned} 2(3x-1)-3(x+2) &\leq 4x-6 \\ 6x-2-3x-6 &\leq 4x-6 \\ 3x-8 &\leq 4x-6 \qquad /-4x+8 \\ 3x-4x &\leq -6+8 \\ -x &\leq 2 \qquad /:(-1) \\ x &\geq -2 \Rightarrow x \in \langle -2; \infty) \end{aligned}$$

Řešení je tedy B.

26.2
$$\begin{aligned} 4(2x-3)-2(x+1) &\leq 7x-8 \\ 8x-12-2x-2 &\leq 7x-8 \\ 6x-14 &\leq 7x-8 \qquad /-7x+14 \\ 6x-7x &\leq -8+14 \\ -x &\leq 6 \qquad /:(-1) \\ x &\geq -6 \Rightarrow x \in \langle -6; \infty) \end{aligned}$$

Řešení je tedy E.

26.3
$$\begin{aligned} 4(3x-2)-6(x-3) &\leq 7x+15 \\ 12x-8-6x+18 &\leq 7x+15 \\ 6x+10 &\leq 7x+15 \qquad /-7x-10 \\ 6x-7x &\leq 15-10 \\ -x &\leq 5 \qquad /:(-1) \\ x &\geq -5 \Rightarrow x \in \langle -5; \infty) \end{aligned}$$

Řešení je tedy D.

ŘEŠENÍ – FUNKCE

1 $D_f = (-5; -2) \cup (-2; 1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
$H_f = (-4; -2) \cup \langle -1; 3\rangle$

2 Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule a současně výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule.

Proto musí platit, že: $\left.\begin{array}{l} 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3 \wedge x \leq 5 \Rightarrow x \in (3; 5\rangle$

3 Hodnota výrazu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rovna součtu hodnot funkce f v bodě $x = \frac{1}{2}$ a bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Do předpisu funkce tedy za x dosadíme nejprve $\frac{1}{2}$ a vypočteme hodnotu funkce, potom $-\frac{1}{2}$ a oba výsledky sečteme.

$$f: y = \frac{|x-3|}{2x} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{1} = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - 3\right|}{\cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right|}{-1} = -\left|-\frac{7}{2}\right| = -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

4

4.1. $f_1: y = \dfrac{2}{|x| - 3} \Rightarrow |x| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq \pm 3$ — A ☐ N ■

4.2. $f_2: y = \dfrac{x}{x^2 + 3} \Rightarrow x^2 + 3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -3$ je pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ — A ■ N ☐

4.3. $f_3: y = \dfrac{2x + 2}{x + 1} \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ — A ☐ N ■

4.4. $f_4: y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{2}} \Rightarrow \dfrac{x^2 + 3}{2} > 0$ je vždy pravdivé tvrzení, proto $x \in R$ — A ■ N ☐

5 $A[0; 0]$: $\frac{0^2+0}{0-1} = 0 \Rightarrow$ bod $A[0; 0]$ leží

$B[-1; 0]$: $\frac{(-1)^2+(-1)}{(-1)-1} = \frac{1-1}{-2} = 0 \Rightarrow$ bod $B[-1; 0]$ leží

$C[2; 6]$: $\frac{2^2+2}{2-1} = \frac{4+2}{1} = 6 \Rightarrow$ bod $C[2; 6]$ leží

$D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $\frac{(-3)^2+(-3)}{(-3)-1} = \frac{9-3}{-4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ bod $D\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ neleží

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

6 Spotřeba 6,3 litru na 100 kilometrů znamená, že na 1 kilometr ujeté vzdálenosti se spotřebuje $\frac{6{,}3}{100}$ litru paliva.

Spotřeba paliva je přímo úměrná počtu ujetých kilometrů.

Množství paliva p, které zbývá v nádrži v závislosti na počtu ujetých kilometrů k,
vyjádříme pomocí lineární funkce:

$$p = 55 - \frac{6{,}3}{100}k$$

Po úpravě: $p = -0{,}063k + 55$

7 $v = at + b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_1 = at_1 + b \Rightarrow 337{,}92 = 10a + b \\ v_2 = at_2 + b \Rightarrow 350{,}12 = 30a + b \end{array}\right\}$ řešením soustavy je $a = 0{,}61$ a $b = 331{,}82$

Pro příslušnou lineární závislost tedy platí $v = 0{,}61t + 331{,}82$.

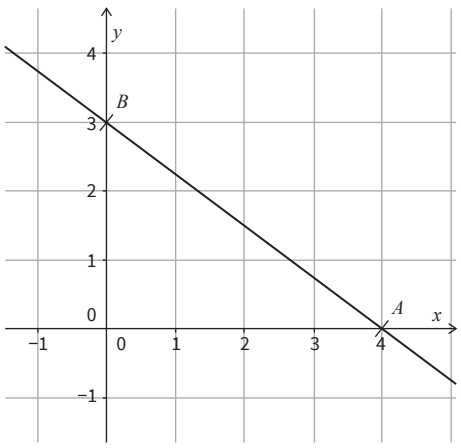
8 Průsečík grafu funkce s osou x je bod $A[x; 0]$ (jestliže bod A leží na ose x, je jeho y-ová souřadnice nulová), průsečík grafu funkce s osou y je bod $B[0; y]$ (jestliže bod B leží na ose y, je jeho x-ová souřadnice nulová). X-ovou souřadnici bodu A vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za y hodnotu 0, y-ovou souřadnici bodu B vypočteme tak, že do předpisu funkce $y = -0{,}75x + 3$ dosadíme za x hodnotu 0.

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge y = 0) \Rightarrow 0 = -0{,}75x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{0{,}75} = 4 \Rightarrow A[4; 0]$

$(y = -0{,}75x + 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -0{,}75 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[0; 3]$

Vzdálenost bodů $|AB|$ vypočteme užitím Pythagorovy věty.

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



9 9.1. $y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ **D**

9.2. $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ **B**

9.3. $y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ **E**

10 Grafem funkce f je přímka, která se v osové souměrnosti podle osy x zobrazí opět na přímku. V osové souměrnosti podle osy x se funkční hodnoty původní funkce změní na hodnoty opačné, tzn. $g(x) = -f(x)$.

Proto $g: y = -x - 2$.

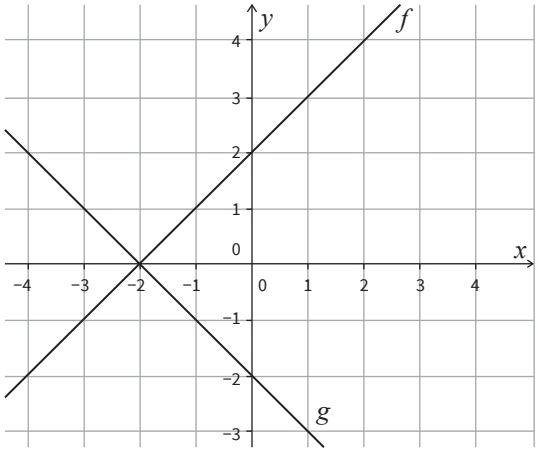
A) $g: y = x + 2$

B) $g: y = -x + 2$

C) $g: y = x - 2$

D) $g: y = -x - 2$

E) $g: y = \frac{1}{x+2}$



11 $f: y = x - 2 \wedge P[x; 1] \in f \Rightarrow 1 = x - 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ funkce se protínají v bodě $P[3; 1]$

$g: y = ax + 4 \wedge P[3; 1] \in g \Rightarrow 1 = 3a + 4 \Rightarrow -3 = 3a \Rightarrow a = -1$

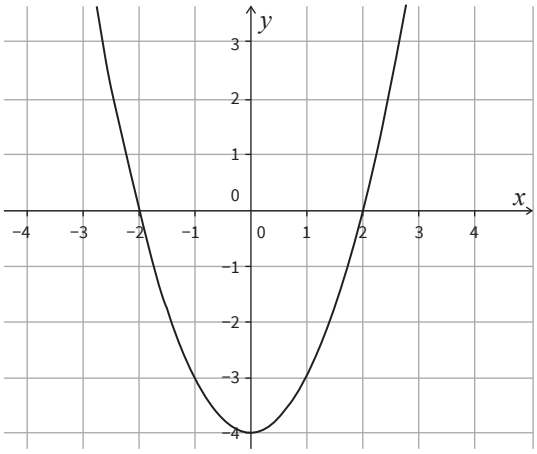
A) $a = -2$

B) $a = -1$

C) $a = -\frac{1}{2}$

D) $a = 1$

E) $a = 2$



12 Je-li funkce f souměrná podle osy y a hodnota minima je −4, potom funkce prochází bodem $V[0; -4]$. Jestliže jeden z průsečíků funkce s osou x má souřadnice [2; 0], potom druhý má souřadnice [−2; 0].

Graf funkce prochází tedy také body $P_{x1}[2; 0]$ a $P_{x2}[-2; 0]$.

Funkční předpis kvadratické funkce je $f: y = ax^2 + bx + c$. Souřadnice bodů V, P_1, P_2, které leží na grafu této funkce, musí této rovnici vyhovovat, tj.

$V \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -4$
$P_{x1} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$
$P_{x2} \in f: y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow 0 = 4a - 2b + c$

Jiná možnost řešení: symetricky podle y znamená $b = 0$, $y = ax^2 + c$, po dosazení bodů $c = -4$, $a = 1$.

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je $a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -4$.
Pro funkci f tedy platí: $f: y = x^2 - 4$

13 $f(a) = a^2 + 2a + 3 \wedge f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1) + 3 = a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 3 = a^2 + 4a + 6$

$f(a+1) \geq f(a)$

$a^2 + 4a + 6 \geq a^2 + 2a + 3$

$2a \geq -3$

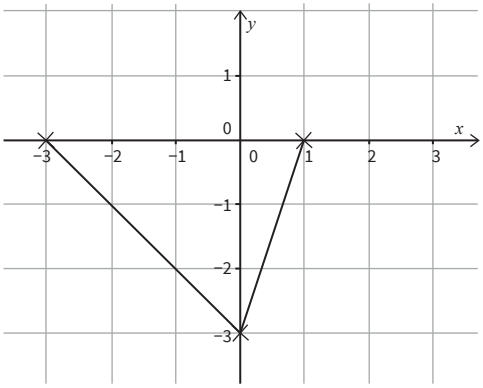
$a \geq -\frac{3}{2}$

$a \in \langle -3/2, \infty)$

14 Průsečík grafu funkce f s osou y určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za hodnotu x 0. Průsečík grafu funkce f s osou x určíme tak, že do předpisu $f: y = x^2 + 2x - 3$ dosadíme za y hodnotu 0.

$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge x = 0) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P_1[0; -3]$
$(f: y = x^2 + 2x - 3 \wedge y = 0) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow (x = -3 \vee x = 1) \Rightarrow P_2[-3; 0] \wedge P_3[1; 0]$

Z obrázku je patrno, že $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



15 Funkční předpis kvadratické funkce f upravíme na vrcholový tvar, abychom získali souřadnice vrcholu, tj. $f: y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ a $V[-2; -1]$. V osové souměrnosti podle osy y se vrchol $V[-2; -1]$ zobrazí na vrchol $V_1[2; -1]$.

Pro funkci g potom platí $g: y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$.

A) $g: y = x^2 + 4x - 3$

B) $g: y = x^2 - 4x + 3$

C) $g: y = -x^2 + 4x + 3$

D) $g: y = x^2 - 4x - 3$

E) $g: y = -x^2 - 4x + 3$

16 Jestliže body A, B leží na grafu funkce f, musí jejich souřadnice vyhovovat funkčnímu předpisu exponenciální funkce f.

Po dosazení získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$A[-1; 4] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 4 = a^{-1+1} + b \Rightarrow 4 = a^0 + b \Rightarrow 4 = 1 + b \Rightarrow b = 3$
$B[2; 11] \in f: y = a^{x+1} + b \Rightarrow 11 = a^{2+1} + b \Rightarrow 11 = a^3 + 3 \Rightarrow 8 = a^3 \Rightarrow a = 2$

Součet $a + b$ je tedy roven 5.

17 Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro všechna $a > 1$.

Řešíme tedy nerovnici $\frac{a+1}{a-1} > 1$, tj.

$$\frac{a+1}{a-1} > 1$$

$$\frac{a+1}{a-1} - 1 > 0$$

$$\frac{a+1-(a-1)}{a-1} > 0$$

$$\frac{2}{a-1} > 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$a \in (1, \infty)$$

18 Exponenciální funkce $y = a^x$ je definována pro všechna $a \in R^+ - \{1\}$. U uvedených funkcí ověříme, zda základ a vyhovuje příslušné podmínce.

$f: y = (\cos 2\pi)^{x+1} \Rightarrow a = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$g: y = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{2x+1} \Rightarrow a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ vyhovuje podmínce, je exp. fce

$h: y = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4\right)^{x-1} \Rightarrow a = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

$l: y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{x+3} \Rightarrow a = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ nevyhovuje podmínce, není exp. fce

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

19

$$2^{3-x} + 2^{1-x} = 40$$
$$2^3 \cdot 2^{-x} + 2^1 \cdot 2^{-x} = 40$$
$$2^{-x}(2^3 + 2^1) = 40$$
$$2^{-x}(8 + 2) = 40$$
$$2^{-x} \cdot 10 = 40$$
$$2^{-x} = 4$$
$$2^{-x} = 2^2$$
$$x = -2$$

A) (−5; −3)

B) (−3; −1)

C) (−1; 1)

D) (1; 3)

E) (3; 5)

20 Při řešení rovnice využijeme vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, který říká, že základ logaritmu umocněný na výsledek logaritmu dává logaritmovaný výraz.

$$\log_2(x-3) = \log_3 9$$
$$\log_2(x-3) = 2$$
$$2^2 = x-3$$
$$4 = x-3$$
$$x = 7$$

21
$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{1-2\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\sqrt{3}} = \frac{3(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3}(1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 6$$

22 Výraz ve jmenovateli funkce nesmí být roven nule a výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, tzn. $(\sin x \neq 0 \wedge \sin x \geq 0) \Rightarrow \sin x > 0$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu, proto $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

23
$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{-(1 - \sin^2 x)} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 2\sin x \cos x - 1}{-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin x \cancel{\cos x}}{-\cos^{\cancel{2}} x} = -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\operatorname{tg} x$$

Podmínky: $\sin^2 x - 1 \neq 0 \Rightarrow \sin^2 x \neq 1 \Rightarrow \sin x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

24 **Využijeme grafické řešení.**

Z obrázku jsou patrné příslušné tři průsečíky.

Průsečíky v bodech $x = 0$ a $x = 2\pi$ nevyhovují intervalu, na kterém řešení hledáme.

A) 0 řešení

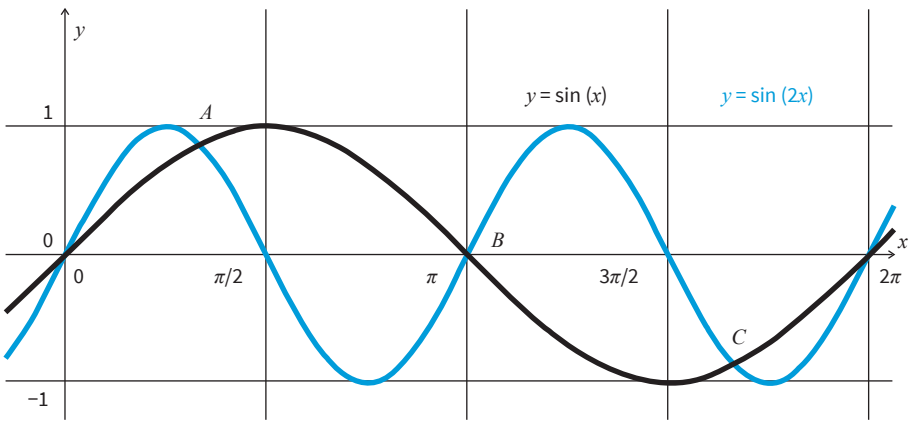
B) 1 řešení

C) 2 řešení

D) 3 řešení

E) 4 řešení

Využijte grafů obou funkcí.



25

25.1. $y = 2\sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right] \end{cases}$

25.2. $y = \cos x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3}+4}{2} \Rightarrow B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right] \\ \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

25.3. $y = \operatorname{tg} x - 3 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{\sqrt{3}-9}{3} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 3 = \sqrt{3} - 3 \Rightarrow C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right] \end{cases}$

A) $A\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right]$

B) $B\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right]$

C) $C\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 3\right]$

D) $D\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - 1\right]$

E) $E\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}+2}{3}\right]$

25.1. **D**
25.2. **B**
25.3. **C**

26 $\sqrt{2}\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

A) 0

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

D) $\frac{3}{2}\pi$

E) 2π

ŘEŠENÍ – POSLOUPNOSTI A FINANČNÍ MATEMATIKA

1 A) $a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5}{5} = 2$

B) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{5} = -\frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} = 0$

C) $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ posloupnost není aritmetická

D) $\frac{a^2}{a_1} \neq \frac{a^3}{a_2}$ posloupnost není geometrická

E) $a_3 + a_4 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{5} + \frac{4^2 - 3 \cdot 4}{5} = 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný. V geometrické posloupnosti je podíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

2 Délky píšťal tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_5 = 0{,}52$; $a_{13} = 1{,}16$

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci d:

$a_{13} = a_5 + (13 - 5) \cdot d$

$d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$

Po dosazení:

$d = 0{,}08$ m

Pro výpočet devatenáctého členu posloupnosti využijeme opět vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti:

$a_{19} = a_5 + (19 - 5) \cdot d$

Po dosazení:

$a_{19} = 0{,}52 + 14 \cdot 0{,}08 = 1{,}64$ m

3 Členy a_3 a a_9 v rovnici vyjádříme pomocí prvního členu a_1 a diference d:

$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 9$

Z této rovnice vyjádříme diferenci d:

$d = \frac{9 - 2a_1}{10}$

Po dosazení:

$d = -0{,}5$

4 Sudé číslo dělitelné třemi musí mít ciferný součet dělitelný třemi a končit jednou z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Hledaná čísla jsou současně dělitelná šesti, a tvoří tedy aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 6$.

Nejprve najdeme nejmenší a největší dvojciferné číslo s touto vlastností:

$a_1 = 12$; $a_n = 96$; $d = 6$

Počet hledaných dvojciferných čísel určíme ze vzorce n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$
$n = 15$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_{15} = \frac{15}{2} \cdot (12 + 96)$

$s_{15} = 810$

5 5.1 Počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 3$.

$a_1 = 20$; $d = 3$; $n = 9$;

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$a_9 = 20 + (9 - 1) \cdot 3$
$a_9 = 44$

5.2 $s_n = 335$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dosadíme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot d)$

Po dosazení a úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$3n^2 + 37n - 670 = 0$

$n_1 = -\frac{67}{3}$ (záporný, neceločíselný kořen nevyhovuje této úloze)

$n_2 = 10$

6 6.1 Počty kostek v šedých sloupcích v pravé polovině hradu (od středního sloupce počínaje) tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -1$.

$a_1 = 10$; $d = -1$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet šedých sloupců v pravé polovině hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 10 + (n - 1) \cdot (-1)$
$n = 9$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_9 = \frac{9}{2} \cdot (10 + 2) = 54$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma. Abychom ale kostky v prostředním sloupci nezapočítali dvakrát, odečteme 10:

$s = 2 \cdot 54 - 10 = 98$

6.2 Počty kostek ve dvojitých bílých sloupcích v pravé polovině hradu tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -2$.

$a_1 = 16$; $d = -2$; $a_n = 2$

Nejprve určíme počet dvojitých bílých sloupců v pravé části hradu:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Po dosazení:

$2 = 16 + (n - 1) \cdot (-2)$
$n = 8$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Po dosazení:

$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (16 + 2) = 72$

Protože je levá polovina hradu osově souměrná s pravou, vynásobíme tento počet dvěma:

$s = 2 \cdot 72 = 144$

A) méně než 98
B) 98
C) 108
D) 140
E) více než 140

6.1 **B**
6.2 **E**

Úlohu bychom mohli řešit i jiným způsobem – počítat pouze jednoduché bílé sloupce a pro celkový počet bílých kostek poté výsledek vynásobit dvěma.

7 7.1 $q = \sqrt{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ A ☐ N ■

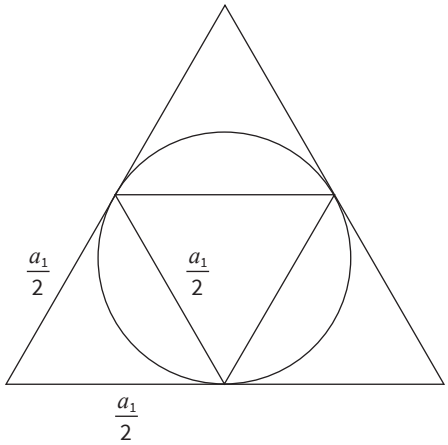
Kvocient geometrické posloupnosti je podíl libovolného členu této posloupnosti a členu předchozího.

7.2 $a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ A ■ N ☐

7.3 $a_3 + a_4 + a_5 = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{38}{81}$ A ■ N ☐

7.4 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$ A ☐ N ■

8 8.1 Délky stran jednotlivých trojúhelníků tvoří členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 1$ m. Abychom si lépe představili hodnotu kvocientu, je vhodné si druhý největší trojúhelník pootočit tak, aby jeho vrcholy ležely ve středech stran největšího trojúhelníku.



Geometrická posloupnost má tedy kvocient $q = \frac{1}{2}$.

Čtvrtý člen posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ m = 0,125 m

Pro obvod trojúhelníku platí:

$o_4 = 3 \cdot a_4 = 0{,}375$ m

8.2 $S_n = \frac{\sqrt{3}}{32}$ m^2

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí vztah:

$S_n = a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Z tohoto vztahu vyjádříme strany trojúhelníku:

$a_n = \sqrt{\frac{4S_n}{\sqrt{3}}}$

Po dosazení:

$a_n = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}}$ m = 0,25 m

Podle Pythagorovy věty má výška rovnostranného trojúhelníku velikost $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Pro obsah rovnostranného trojúhelníku pak dostáváme vztah $S = \frac{a \cdot v}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Úlohu bychom mohli řešit taky pomocí posloupnosti obsahů trojúhelníků. Ta je taky geometrická a její kvocient je druhou mocninou kvocientu posloupnosti délek stran trojúhelníků. Kvocient posloupnosti obsahů je tedy $\frac{1}{4}$ a první člen $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ m^2.

Pořadí hledaného členu posloupnosti určíme ze vztahu pro n-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Po dosazení:

$0{,}25 \text{ m} = 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n = 3$ Daný obsah má třetí největší trojúhelník.

A N

9 K_0 = 400 000 Kč (počáteční výše úvěru)
p = 0,08 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 3 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Při splácení dluhu se daň z úroků neplatí (k = 1). Při spoření ale musíme zaplatit daň z úroků ve výši 15 % (k = 0,85).

Výši dlužné částky po třech letech určíme ze vztahu:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Po dosazení:
$K_3 = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3$ Kč ≐ 503 885 Kč

10 K_0 = 40 000 Kč (počáteční vklad)
p_1 = 0,02 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
p_2 = 0,013 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n_1 = 3 (počet úrokovacích období)
n_2 =2 (počet úrokovacích období)
k = 0,85 (zdaňovací koeficient)

Nejprve spočítáme kapitál (zůstatek) po třech letech spoření:

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n1} = 42\,075 \text{ Kč}$$

Poté spočítáme kapitál (zůstatek) po dalších dvou letech spoření:

$$K_5 = K_3 \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n2}$$
K_5 = 43 010 Kč ≐ 43 000 Kč

A) 42 000 Kč
B) 43 000 Kč
C) 43 600 Kč
D) 44 000 Kč
E) 44 200 Kč

Samozřejmě je možné spočítat kapitál po pěti letech spoření okamžitě ze vztahu:
$K_5 = K_0 \cdot (1 + p_1 \cdot k)^{n1} \cdot (1 + p_2 \cdot k)^{n2}$

11 K_0 = 1 500 000 Kč (počáteční výše úvěru)
p = 0,055 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 10 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

11.1 **Výši dlužné částky po deseti letech určíme ze vztahu:**

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)$$

Po dosazení:

$K_{10} = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^{10}$ ≐ 2 562 000 Kč

11.2 $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Po dosazení:

$$p = \sqrt[10]{\frac{2\,500\,000}{1\,500\,000}} - 1 \doteq 5{,}2\ \%$$

ŘEŠENÍ – PLANIMETRIE

1 1.1 D
1.2 B
1.3 E
1.4 A

Vedlejší úhly k úhlu α jsou dva (β a δ), oba totiž tvoří s úhlem α úhel přímý. U ostatních pojmů je vždy možné uvést jen jeden úhel.

2 2.1 C
2.2 A
2.3 B
2.4 F

2.1 *Pozor, danou množinou není jen jedna rovnoběžka s přímkou p, ale obě, tedy přímky q i r.*
2.3 *Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem AB (tedy k) bez krajních bodů A a B.*
2.4 *Jde o osu úsečky AB, což je přímka p, protože je na AB kolmá a prochází jejím středem.*

3 Za dvě minuty, tedy za jednu třicetinu hodiny, ujede cyklista dráhu

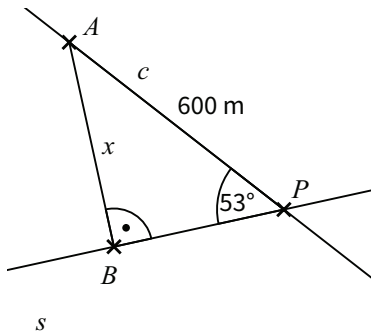
$s = v \cdot t = 18 \cdot \frac{1}{30}\,\text{km} = 0{,}6\,\text{km} = 600\,\text{m}.$

Na obrázku je znázorněna silnice jako přímka s, lesní cesta jako přímka c. Za dvě minuty dojede cyklista z bodu P do bodu A. Jeho vzdálenost od silnice však není 600 m, ale je rovna délce kolmice x vedené z bodu A na přímku s.

V pravoúhlém trojúhelníku ABP platí: $\frac{x}{|AP|} = \sin 53°$

$x = \sin 53° \cdot 600\,\text{m} \doteq 480\,\text{m}$

A)



4 4.1
V pravoúhlém trojúhelníku ACD s odvěsnami AC a CD platí:

$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}5\,\text{cm}^2$

$S = 7\,\text{cm}^2$

Tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku není příliš známý, ve škole se spíše počítají příklady s využitím vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Ale katalog požadavků jej obsahuje, proto bychom jej měli procvičit.

4.2
Tento trojúhelník není pravoúhlý. Máme tedy vypočítat obsah obecného trojúhelníku, u něhož známe dvě strany a úhel, který svírají – obsah trojúhelníku určeného *sus*.

V tabulkách můžeme najít například tento vzorec: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (úhel γ je úhel, který svírají strany a, b)

Protože máme zadány strany b a c a úhel α, přepíšeme tento vzorec jako $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 50°$

$S = 7{,}66\,\text{cm}^2$

$S \doteq 8\,\text{cm}^2$

5 Pomůže nám obrázek vpravo.

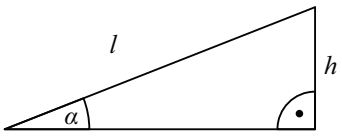
Označíme-li si hledaný úhel jako α, platí: $\sin \alpha = \frac{h}{l}$;

kde h se rovná rozdílu nadmořských výšek, tedy $h = (630 - 440)\ \text{m} = 190\ \text{m}$

$\sin \alpha = \frac{190}{2100} = 0{,}905$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}905) = 5{,}19°$

A)



Důležité je správně si nakreslit obrázek (nebo si aspoň situaci představit). Zadaných 2,1 km není vodorovná vzdálenost, tedy délka odvěsny, ale délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

6 6.1 $v = 8 \cdot \text{tg}\ 35° = 5{,}6\ \text{m}$, tedy B)

6.2 $v = 8 \cdot \sin 42° = 5{,}4\ \text{m}$, tedy A)

6.3 podle sinové věty $\frac{v}{9} = \frac{\sin 31°}{\sin 52°}$

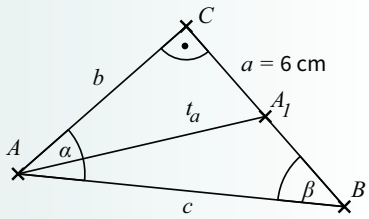
$v = 5{,}9\ \text{cm}$, tedy C)

První dvě úlohy jsou klasické příklady na využití goniometrických funkcí. Třetí úloha je těžší, nemůžeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku. Protože známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich, použijeme pro výpočet strany proti druhému z nich větu sinovou.

7

	A	N
7.1 Je-li $\alpha = 30°$, pak $c = 12$ cm.	●	○
7.2 Je-li $b = 4$ cm, pak $t_a = 5$ cm.	●	○
7.3 Je-li $b = 4$ cm, pak $c = 8$ cm.	○	●
7.4 Je-li $\beta = 50°$, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.	○	●

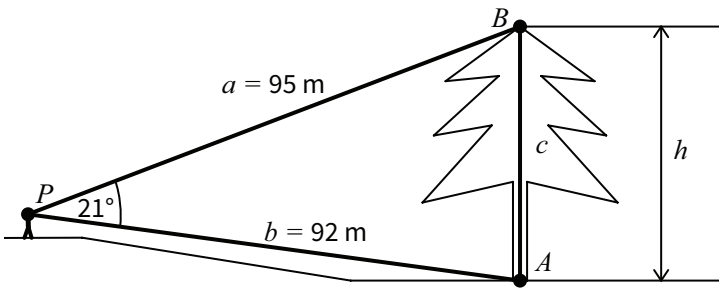
7.1 $\frac{a}{c} = \sin 30° = \frac{1}{2}$,
tedy $c = 2a = 12$ cm
7.2 *Těžnice* t_a *spojuje vrchol A se středem strany a, tedy bodem* A_1.
$|CA_1| = \frac{a}{2} = 3$ cm
Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ACA_1 *platí*
$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$t_a^2 = 4^2 + 3^2$
$t_a = 5$ cm
7.3 $c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{52}$ cm $\doteq 7{,}21$ cm $\neq 8$ cm
7.4 *Je-li* $\beta = 50°$, *pak je*
$\alpha = 90° - 50° = 40°$
Aby byl trojúhelník rovnoramenný, musím mít dva vnitřní úhly shodné.



8 Pomůžeme si obrázkem.
V trojúhelníku ABP známe dvě strany a úhel, který svírají.
Stranu $c = h$ vypočítáme podle kosinové věty:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$c^2 = 95^2 + 92^2 - 2 \cdot 95 \cdot 92 \cdot \cos 21°$
$c^2 = 17\,489 - 16\,319$
$c^2 = 1\,170$
$c \doteq 34$ m

D)



Nemůžeme využít žádný pravoúhlý trojúhelník, musíme použít kosinovou větu.

9 9.1
Protože skutečná délka arboreta je 7 500krát větší než na plánu a skutečná šířka je také 7 500krát větší než na plánu, je skutečná rozloha 7 500²-krát větší než rozloha na plánu.
$S = 3{,}84 \cdot 7\,500^2\ \text{cm}^2 = 2{,}16 \cdot 10^8\ \text{cm}^2 = 21\,600\ \text{m}^2$
$S = 2{,}16$ ha

9.2
Označme délku arboreta jako a, šířku jako b. Protože má být délka o polovinu větší než šířka, platí $a = 1{,}5b$
$S = a \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$1{,}5b \cdot b = 21\,600\ \text{m}^2$
$b^2 = 14\,400\ \text{m}^2$
$b = 120$ m
$a = 180$ m

10 Nebudeme měřit délky úseček na obrázku, protože ten neodpovídá zadání, úhel u vrcholu A např. neměří přesně 60°. Budeme muset obě délky vypočítat.
V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{|AC|}{8\ \text{cm}} = \cos 60°$$

$$|AC| = 4\ \text{cm}$$

Stranu BD vypočítáme pomocí sinové věty. Úhel proti této straně, při vrcholu A, má velikost 120°, protože je vedlejším úhlem k úhlu 60°. Platí tedy:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°}$$

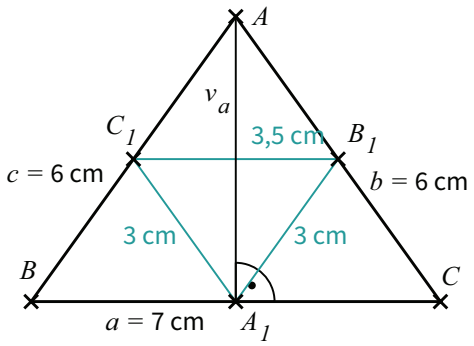
Pokud víme, že sin 120° je tabulková hodnota, $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vyjde nám složený zlomek, který zjednodušíme a dostaneme:

$$|BD| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Po usměrnění (rozšíření číslem $\sqrt{2}$) vyjde, že $|BD| = 4\sqrt{6}$ cm.
$|BD| : |AC| = 4\sqrt{6} : 4 = \sqrt{6} : 1$
Pokud nevíme, že sin 120° je tabulková hodnota, vyjde nám na kalkulačce, že $|BD| \doteq 9{,}79795\ldots$ cm
Poměr $|BD| : |AC| = 9{,}798 : 4$ zkrátíme čtyřmi
$9{,}798 : 4 = 2{,}44948\ldots : 1$
Vypočítáme, kolik je $\sqrt{5}$ a $\sqrt{6}$ a zjistíme, že se jedná o poměr $\sqrt{6} : 1$.

C)

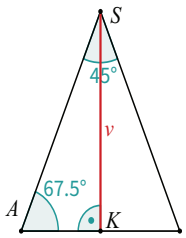
11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje, a má poloviční délku než tato strana. Délky stran trojúhelníku ABC jsou tedy 6 cm, 6 cm a 7 cm. Tento trojúhelník je rovnoramenný.
Nezáleží na tom, která strana má délku 6 cm a která 7 cm. Protože je trojúhelník rovnoramenný, bude nejlepší zvolit za stranu a základnu (viz obrázek):



Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$
Výšku v_a vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABA_1.
$v_a^2 = 6^2 - 3{,}5^2$
$v_a = \sqrt{23{,}75}$ cm
Dosadíme do vzorce: $S = \frac{7 \cdot \sqrt{23{,}75}}{2} = 17{,}057\ \text{cm}^2$
$S \doteq 17\ \text{cm}^2$ A)

12 12.1
Úhlopříčky spojující protější vrcholy rozdělí pravidelný osmiúhelník na osm shodných trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků je rovnoramenný, oba úhly při základně jsou tedy shodné. Úhel proti základně (u středu osmiúhelníku) má velikost 360° : 8 = 45°, na oba úhly při základně proto v každém trojúhelníku zbývá celkem 135°. Úhel α obsahuje dva úhly při základně, tedy $\alpha = 135°$.

12.2
Obsah jednoho z vyšrafovaných trojúhelníků vypočítáme s pomocí následujícího obrázku. Úsečka AK měří polovinu délky strany osmiúhelníku, tedy 2,5 m. S využitím funkce tangens určíme výšku v trojúhelníku:



$\frac{v}{|AK|} = tg\ 67{,}5°$

$v = 2{,}5\ \text{m} \cdot tg\ 67{,}5° = 6{,}036\ \text{m}$

Obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{5 \cdot 6{,}036}{2} = 15{,}09\ \text{m}^2$

Obsah tří trojúhelníkových záhonů je tedy 3 . 15,09 m² = 45,27 m² ≐ 45 m²

13 Daný čtyřúhelník je pravoúhlý lichoběžník, jehož obsah se vypočítá podle vzorce $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Obsah S známe, stranu $c = CD$ také, výškou v je strana $d = AD$, protože je k kolmá základnám a, c. Vyjádříme z tohoto vzorce neznámou a tak, že rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme v a odečteme od ní c:

$2S = (a+c) \cdot v \quad / : v$

$\frac{2S}{v} = a + c \quad / - c$

$\frac{2S}{v} - c = a$

Po dosazení vyjde, že $a = 11$ cm.

E)

14 Obsah kosočtverce lze vyjádřit dvěma způsoby: pomocí strany a výšky, nebo pomocí úhlopříček:

$S = a \cdot v;\ S = \frac{e \cdot f}{2}$

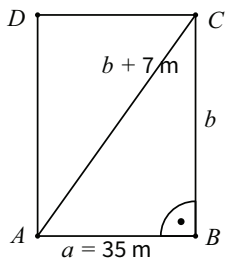
Platí tedy $a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2}$. Délky úhlopříček e a f známe, výška kosočtverce je rovna průměru kružnice vepsané, tedy 7 cm. Neznámou a osamostatníme na levé straně rovnice tak, že rovnici vydělíme v:

$a = \frac{e \cdot f}{2v}$

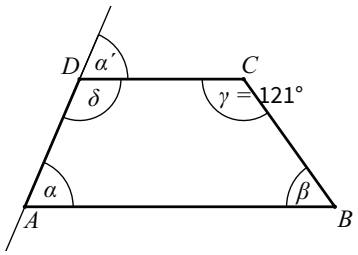
$a \doteq 11$ cm

A)

15 Označíme si známou stranu obdélníku jako a, neznámou jako b. Víme, že úhlopříčka je o 7 m delší než strana b, proto platí $u = b + 7$ m.
Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí: $(b + 7)^2 = b^2 + 35^2$.
Z této rovnice vyjde, že $b = 84$ m.
Obsah obdélníku $S = a \cdot b = 35 \cdot 84$ m².
$S = 2\,940$ m²



16 Protože jsou strany AB a CD rovnoběžné, je úhel α shodný s úhlem α' (souhlasné úhly). Úhel δ je vedlejší k α', proto platí $\delta + \alpha' = 180°$ a také $\delta + \alpha = 180°$. Podobně platí, že $\beta + \gamma = 180°$.
Úhel β vypočítáme snadno: $\beta = 180° - \gamma = 59°$.



Úhly α a δ vypočítáme tak, že si vyjádříme α jako $\frac{2}{3}\delta$:

$\frac{2}{3}\delta + \delta = 180°$

$\delta = 108°$

$\alpha = 72°$

Rozdíl úhlů $\alpha - \beta$ je tedy 72° – 59° = 13°.

17 Z celkové délky okruhu 400 m připadá na obě zatáčky celkem (400 – 2 x 80) m = 240 m. Když si jednu z nich pomyslně posuneme k druhé, složí kružnici. Naším úkolem je tedy vypočítat poloměr r kružnice o délce o = 240 m.

$o = 2\pi r$

$r = \frac{o}{2\pi}$

$r = 38{,}197 \text{ m} \doteq 38 \text{ m}$

18 18.1

Obsah znázorněného mezikruží vypočítáme jako rozdíl obsahů vnějšího a vnitřního kruhu. Poloměr vnitřního $r_1 = 8$, poloměr vnějšího $r_2 = (8 + 3) = 11$.

$S = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$

$S = \pi \cdot (11^2 - 8^2)$

$S = 57\pi$

E)

18.2

Na obrázku je znázorněna kruhová výseč, jejíž obsah se rovná třem čtvrtinám z obsahu kruhu o poloměru 8.

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$

$S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 48\pi$

C)

18.3

Na obrázku je část mezikruží, která přísluší středovému úhlu 45°. Protože 45° je osmina z 360°, tvoří plocha vybarvené části osminu z plochy celého mezikruží. Poloměr menšího kruhu r_1 = 15, poloměr většího kruhu r_2 = (15 + 10) = 25.

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot (\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2)$

$S = \frac{1}{8} \cdot 400\pi = 50\pi$

D)

19 Délku oběžné dráhy vypočítáme jako délku kružnice s poloměrem 384 400 km: $o = 2\pi r$ = 2 415 256 km.
Tuto dráhu vykoná Měsíc za 27,3 dne. Za jeden den tedy urazí dráhu 27,3x kratší.
s = 88 471 km ≐ 88 000 km

E)

20 20.1 F
20.2 C
20.3 A
20.4 D

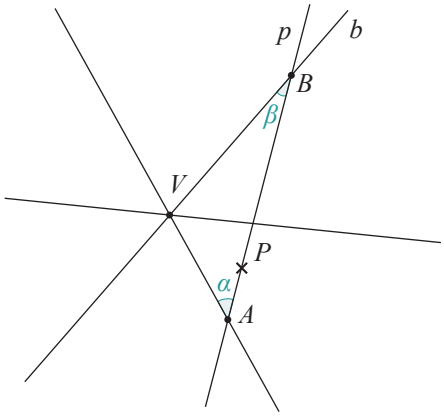
20.1 *Když si zakreslíme body A', B' a C' do mřížky, nevypadá to, že bychom je z bodů A, B a C mohli získat nějakou středovou nebo osovou souměrností ani posunutím. Zkusíme-li trojúhelník ABC otočit kolem bodu $S[1; 1]$ o 90° v záporném smyslu, již to vychází.*

20.2 *Opět si nakreslíme zadané body do mřížky nebo si všimneme, že všechny souřadnice mají opačná znaménka.*

20.3 *Bod A se posunul doprava, bod C doleva, bod B zůstal na místě. Zřejmě jde o osovou souměrnost podle přímky rovnoběžné s osou y, která navíc prochází bodem B.*

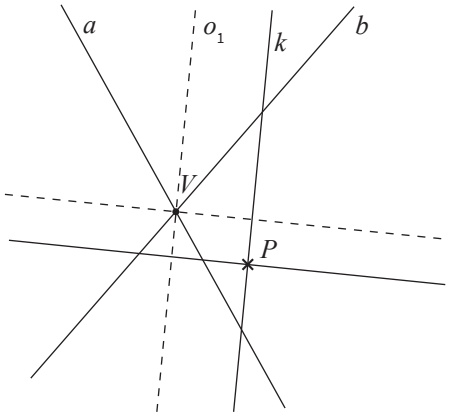
20.4 *Každý bod se posunul o 2 jednotky doleva a o 1 nahoru, jde tedy o posunutí o vektor u = (–2; 1).*

21 Předpokládejme, že taková přímka existuje a označme průsečíky s danými různoběžkami po řadě A a B. Uvažujme nyní trojúhelník ABV, kde V je průsečík daných různoběžek. Mají-li být, podle zadání, úhly u vrcholu A a u vrcholu B shodné, pak musí být trojúhelník ABV rovnoramenný a to znamená, že osa úhlu AVB je kolmá na přímku p.



Promyslete, proč musí jít právě o tuto dvojici úhlů.

Hledáme tedy kolmice (k, l) na osy úhlů (o_1, o_2) daných různoběžek procházejících bodem P.

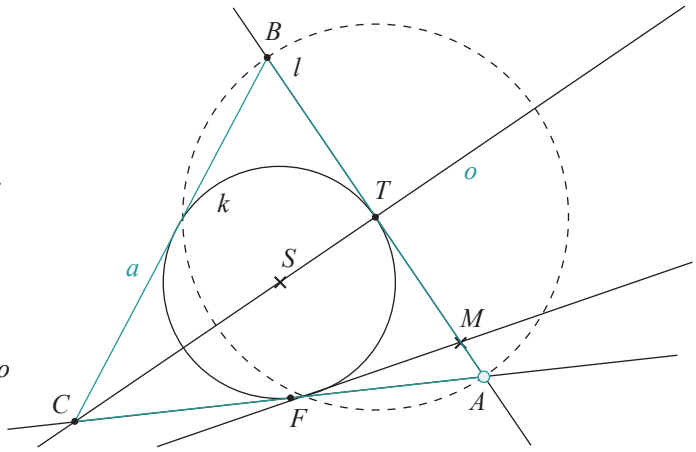


Úloha má dvě řešení, tzn. že v rovině existují dvě přímky, které prochází daným bodem P a svírají s danými různoběžkami stejný úhel.

22 Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Pak o něm můžeme říci, že základna AB leží na tečně ke kružnici k z bodu M, označme ji t. Dále, protože jde o trojúhelník rovnoramenný, leží vrchol C na ose o základny AB, kterou sestrojíme jako kolmici k tečně t bodem dotyku T. Pro body A a B musí platit, že leží jednak na tečně t a také na kružnici l se středem v bodě T a poloměrem $|AB|/2 = 2$ cm. Nakonec strana AC (a stejně tak BC) musí ležet na tečně ke kružnici k vedené z bodu A a (resp. B).

Pro přehlednost sestrojíme jen jednu tečnu z bodu M, a to pomocí Thaletovy kružnice. (Pro druhou tečnu bychom postupovali analogicky.) Dále sestrojíme kolmici na tuto tečnu bodem dotyku T a označíme ji o. Sestrojíme body A a B z jednoho z nich, opět pomocí Thaletovy kružnice, sestrojíme tečny k dané kružnici k. Bod C leží na průsečíku této tečny a osy o.

Řešitelnost úlohy závisí na poloměru dané kružnice k. Je-li poloměr menší než $|AB|/2$, má úloha dvě řešení, neboť bodem M lze zkonstruovat 2 tečny. Pokud je ale poloměr alespoň $|AB|/2$, tj. roven nebo větší, nemá osa o s konstruovanou tečnou z bodu A (resp. B) v dané polorovině průsečík, a tudíž bod C neexistuje.



ŘEŠENÍ – STEREOMETRIE

1 Jestliže se délka tělesové úhlopříčky zmenší o čtvrtinu, zkrátí se o čtvrtinu i délka hrany krychle.
Tedy je-li délka hrany původní krychle a, je délka zmenšené krychle $0{,}75a$.

Povrch původní krychle je
$S = 6a^2$,

povrch zmenšené krychle je
$S' = 6 \cdot (0{,}75a)^2 = 6 \cdot 0{,}75^2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2 \cdot 0{,}5625$,

tzn. že povrch zmenšené krychle tvoří 56,25% původního povrchu.

Změní – li se délka tělesové úhlopříčky krychle o čtvrtinu, zmenší se její povrch **o 43,75 %**.

Úloha vychází ze znalosti vztahu mezi délkou tělesové úhlopříčky a délkou hrany krychle $u = \sqrt{3} \cdot a$. Užitím známého vzorce pro povrch krychle $S = 6a^2$ zjistíme, že povrch zmenšené krychle je $S' = 0{,}5625 \cdot S$. Musíme si ovšem dát pozor, abychom odpověděli na otázku v úloze: O kolik procent se zmenší povrch …? Tedy dopočítat, kolik procent chybí do původního povrchu, což je 100 % – 56,25 % = 43,75 %.

2 V této úloze si nejdříve musíme upřesnit, v jakém poměru jsou délky hran $|AB|$ a $|BC|$.

S tím souvisí výpočet hodnoty výrazu $\sin 390° = \frac{1}{2}$.

Poměr délek hran je $|AB| : |BC| = 3 : 4$.

Obvod 84 cm lze rozdělit na 14 stejných dílů, jeden díl tedy odpovídá délce 6 cm.

Zjistíme si délky hran $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 24$ cm.

Pozor na chybu v závěru výpočtu, tj. určit délku hrany $|AE|$ jako třetinu délky hrany $|AE| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{3}|BC| = 8$ cm.

Objem pak vypočítáme pomocí vzorce $V = a \cdot b \cdot c$, $V = 18 \cdot 24 \cdot 8 = 3456$ cm^2.

E) jiná možnost

3 Při řešení úlohy je důležité si uvědomit, že podstava krabičky je obdélník o stranách $2r$ a $6r$, kde r je poloměr kuličky.

Pro obvod podstavy krabičky platí

$o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm, tedy $r = 4$ cm.

Objem jedné kuličky je $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 268{,}1$ cm^3.

Vypočteme objem velké koule $V = 3 \cdot V' = 3 \cdot 268{,}1$ cm^3 = 804, 25 cm^3

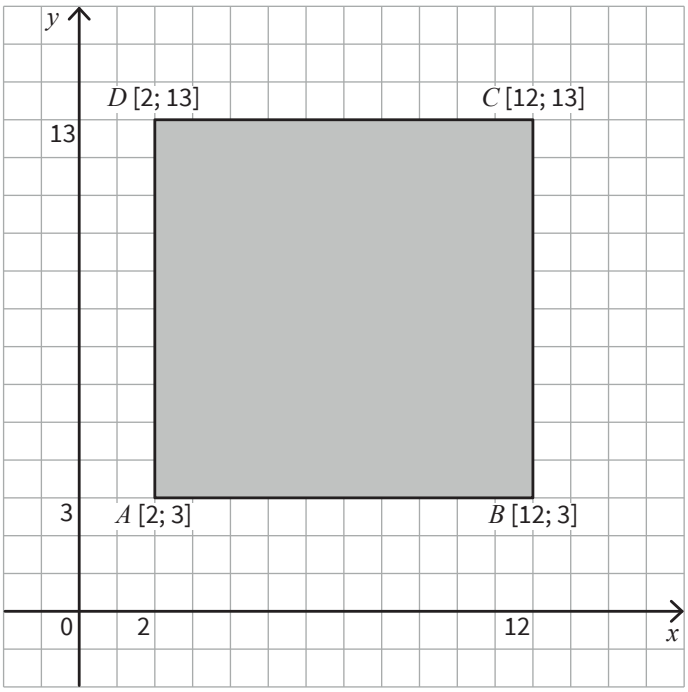
a dosadíme do vzorce $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 804{,}25$ cm^3, kde R je poloměr velké koule.

Získáme hodnotu poloměru velké koule $R = 5{,}77$ cm a určíme povrch koule

$S = 4\pi \cdot R^2 =$ **418 cm^2**.

Prvním krokem je sestavení rovnice o jedné neznámé: $o = 2 \cdot 2r + 2 \cdot 6r = 16r = 64$ cm. Potom si musíme uvědomit, že objem velké koule je stejný jako součet objemů všech tří kuliček. Ze vztahu pro objem velké koule vypočteme její poloměr. Většina studentů zde výpočet končí a zapomíná, že máme zjistit povrch vzniklé koule.

4 Pro lepší představu dané situace je vhodné zakreslit podstavu a najít souřadnice bodu D:



Ze zadání vyplývá, že tři body podstavy jehlanu mají poslední souřadnici nulovou. Pro jistotu tedy můžeme dohledat souřadnice bodu D a uvědomit si, že podstavou je čtverec s obsahem $S_p = 100\ j^2$. V dalším kroku musíme prokázat prostorovou představivost a ze třetí souřadnice vrcholu jehlanu V vyčíst výšku jehlanu $v = 13\ j$. Získané údaje dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

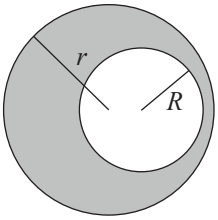
Z obrázku je vidět, že strana čtvercové podstavy má délku $a = 10$ j.

Pro objem jehlanu dostáváme $V = \frac{1}{3} a^2 v =$ **433,3 j³**.

5 Ze známého vztahu pro výpočet obvodu kruhu snadno zjistíme poloměr podstavy válečku $r = 14$ cm.

Skutečnost, že váleček s otvorem má o 35 % menší objem než váleček původní, lze zúžit jen na úvahu vztahující se k podstavě:

Obsah podstavy s otvorem je o 35 % menší než obsah podstavy bez otvoru.



Můžeme tedy zapsat přímou úměrnost:

$\pi \cdot R^2$ ... 35%
$\pi \cdot r^2$ ... 100%

Odsud dostaneme vztah pro poloměr otvoru R:

$R = \sqrt{\frac{35}{100} \cdot r^2} = 8{,}28$ cm.

Obvod otvoru v podstavě $o' = 2 \cdot \pi \cdot R = 52$ cm je roven výšce válečku v.

Úloha vyžaduje pečlivé provedení jednotlivých mezikroků, neboť chyba z nepozornosti způsobí nejen bodovou, ale i časovou ztrátu pro řešitele. Je důležité dobře rozlišovat vztahy mezi pojmy: obvod, poloměr, průměr. Nejvíce se ovšem chybuje v závěrečném výpočtu, neboť vzorec pro povrch výrobku je dlouhý.

Povrch výrobku se skládá ze dvou podstav a dvou plášťů:

$S = 2 \cdot (\pi \cdot r^2 - \pi \cdot R^2) + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot v$

$S = 2\pi\,(r^2 - R^2 + r \cdot v + R \cdot v)$

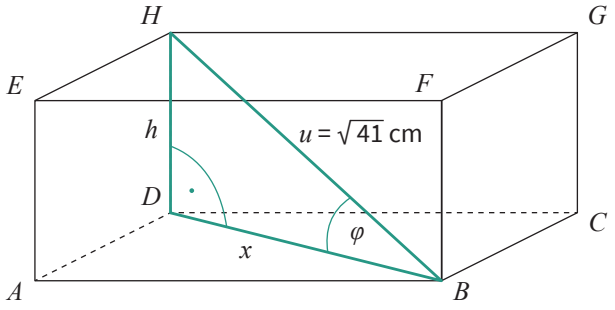
$S \doteq$ **8080 cm²**

6 6.1

Výšku kvádru h vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku DHB pomocí vztahu:

$\sin \varphi = \frac{h}{u} \quad \Rightarrow \quad h = u \cdot \sin 28° \doteq$ **3 cm**

K vyřešení příkladu potřebujeme znát goniometrické funkce ostrého úhlu.



6.2

Pro výpočet povrchu kvádru je nutné určit hodnotu x:

$\cos \varphi = \frac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad x = u \cdot \cos 28° \doteq 5,65$ cm

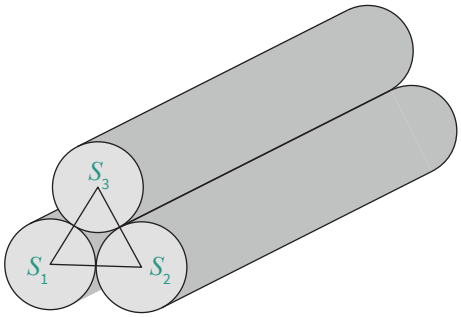
Navíc podstava je čtverec:

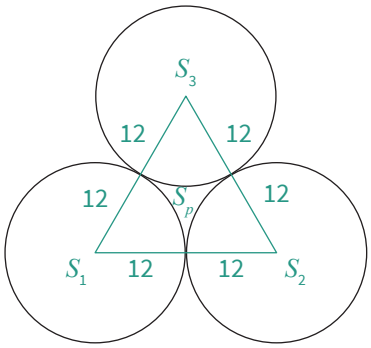
$x = \sqrt{2} \cdot |AB| \quad \Rightarrow \quad |AB| = a = \frac{x}{\sqrt{2}} \doteq 4$ cm.

Povrch celého kvádru je:

$S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \doteq$ **80 cm²**

7 Zaměřme se na trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy podstav, který je rovnostranný:





Klíčovým bodem úlohy je výpočet obsahu podstavy hledaného prostorového útvaru.
K tomu potřebujeme určit obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy podstav sloupů.
Posledním úkolem je složit ze tří kruhových výsečí půlkruh se stejným poloměrem jako mají podstavy sloupů.

Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme z Heronova vzorce:

$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \doteq 249,4$ cm²

Tři žluté kruhové výseče uvnitř trojúhelníku tvoří půlkruh o obsahu:

$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \doteq 226,1$ cm² *(při použití 3,14 místo π)*

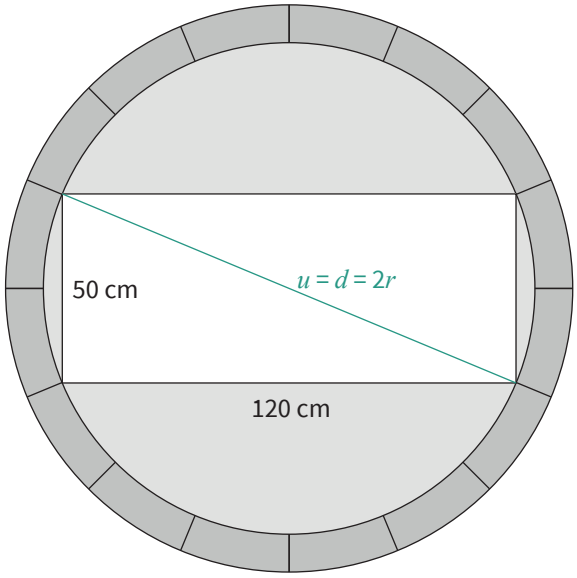
Rozdíl těchto dvou obsahů je obsahem podstavy hledaného prostorového útvaru:

$S_p - S_1 = 23,3$ cm²

Objem prostoru mezi sloupy vypočteme jako součin obsahu podstavy S_p a výšky sloupu v = 300 cm:

$V = S_p \cdot v = 6990$ cm³ $\doteq$ **7 dm³**

8



Řešitel musí spočítat úhlopříčku polystyrenové desky, která je zároveň průměrem studně (viz. obr.).
Z objemu vody ve studni, pak získá výšku tohoto „vodního sloupce“, což odpovídá 74 % hloubky studně.

$u = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130\text{ cm} = 1{,}3\text{ m}$

$r = 0{,}65\text{ m}$

$60\text{ hl} = 6000\text{ l} = 6000\text{ dm}^3 = 6\text{m}^3$

$0{,}74 \cdot V = 6$

$V \doteq 8{,}1\text{ m}^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$8{,}1 = \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot v$

$\boldsymbol{v \doteq 6{,}1\text{ m}}$ **A)**

9 Pro povrch koule platí: $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

a povrch zadané koule je $S = 2\pi \cdot \log_3 729\text{ cm}^2 = 12\pi\text{ cm}^2$.

Z toho vyplývá, že poloměr zadané koule je $r = \sqrt{3}$ cm.

Nejdůležitějším krokem je zjištění, že průměr koule je roven délce tělesové úhlopříčky krychle.

Nyní si musíme uvědomit, že průměr koule je stejný jako délka tělesové úhlopříčky vepsané krychle:

$u = d = 2\sqrt{3}$ cm.

Pro délku hrany krychle platí: $a = \frac{u}{\sqrt{3}} = 2$ cm.

Objem krychle je potom: $V = a^3 =$ **8 cm³**.

10 Prvním krokem pro vyřešení úlohy je výpočet objemu kyblíku.

V této úloze je třeba rozpoznat, že objem písku v kyblíku odpovídá objemu komolého rotačního kužele a k tomu vybrat odpovídající vzorec.

Kyblík má tvar komolého kužele, jehož výška je $v = 22$ cm,

poloměr horní podstavy je $r_2 = 12$ cm

a poloměr dolní podstavy $r_2 = 9$ cm.

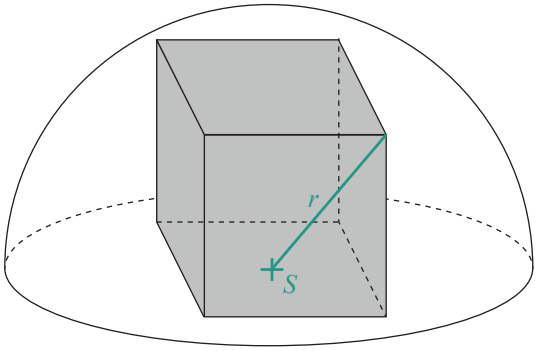
Pro objem komolého rotačního kužele platí: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$.

Objem kyblíku je tedy: $V = 7671{,}77\text{ cm}^3$,

tzn. že objem celého hradu je $V_H = 12 \cdot 7671{,}77\text{ cm}^3 = 92061\text{ cm}^3 \doteq$ **92 litrů**.

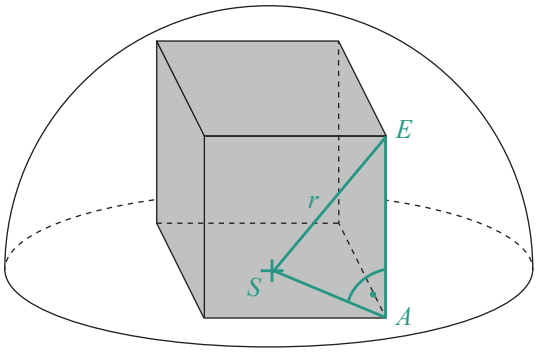
11 Označme si bodem S střed dolní podstavy krychle.

Vnitřní poloměr misky je tedy vzdálenost bodu S a některého vrcholu horní podstavy krychle.



Úloha vyžaduje velice dobrou prostorovou představivost. Pokud si správně zakreslíme body, mezi nimiž lze počítat délku poloměru misky, stačí jen použít dvakrát Pythagorovu větu.

Délku hrany krychle zjistíme ze vztahu pro výpočet jejího objemu:



Délku vnitřního poloměru misky vypočteme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAE:

$r^2 = 8^2 + (\sqrt{32})^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{96}\text{ cm} = 4 \cdot \sqrt{6}\text{ cm}$

Pro délku vnitřního průměru misky platí: $\boldsymbol{d = 8 \cdot \sqrt{6}\text{ cm}}$

12 12.1 A ☒ N ☐

$S_{koule} = S_{krychle}$

$4\pi r^2 = 6a^2$

$r^2 = \frac{3a^2}{2\pi}$

$r = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$

$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)^3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot a^3 \doteq \mathbf{1{,}38}\boldsymbol{a}^3$

$V_{krychle} = a^3$

$\boldsymbol{V_{krychle} < V_{koule}}$

12.1) V úloze musíme dobře ovládat práci se vzorci.
12.2) Zde je třeba správně převádět jednotky a vědět, kolik litrů se nachází v jednom hektolitru.
12.3) Úloha založená na pozornosti řešitele. Výchozím krokem je zjištění, že tři pětiny objemu láhve odpovídají 0,9 l.

12.2 ☒ ☐

$3 \cdot 10^8\text{ cm}^3 + 4 \cdot 10^6\text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^5\text{ dm}^3 + 4 \cdot 10^6\text{ dm}^3 =$
$= 10^5 \cdot (3 + 4 \cdot 10)\text{dm}^3 = 4\,300\,000\text{ dm}^3 = 4\,300\,000\text{ l} = 43\,000\text{ hl}$

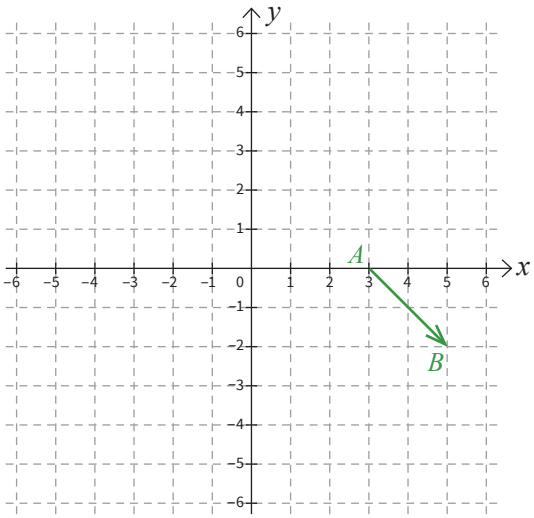
12.3 ☐ ☒

V = 1,5 l

$\frac{3}{5} \cdot 1{,}5 = 0{,}9\text{ l} = 900\text{ ml}$

ANALYTICKÁ GEOMETRIE – ŘEŠENÍ

1 $A[3; 0]$, $B[5; -2]$



Ze souřadnic vektoru žák určí jeho směr a umístění na obrázku. Souřadnice bodů pak vyčte z obrázku.

C) $\vec{c} = (3; -4)$ – je to normálový vektor přímky

Ze zadané obecné rovnice přímky vyplývají souřadnice normálového vektoru (3; –4). Normálový vektor je kolmý ke směrovému vektoru, a nemůže mít tedy shodné souřadnice.

2 2.1

Normálové vektory přímek $\vec{n_p} = (2; -5)$ a $\vec{n_q} = (5; -2)$ nejsou kolmé.

A N

2.2

Normálové vektory přímek $\vec{n_q} = (5; -2)$ a $\vec{n_r} = (-2; 5)$ nejsou k- násobkem jeden druhého.

A N

2.3

Přímku r upravíme a dostaneme stejnou rovnici, jako má přímka p.

A N

Všechny přímky jsou zadány obecnou rovnicí, lze tedy určit normálové vektory přímek a jejich vzájemnou polohu.

3 $\vec{n_p} = \vec{n_q} = (3; -1) \Rightarrow q\colon 3x - y + c = 0$

$B \in q\colon 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -15$

$q\colon 3x - y - 15 = 0$

Žák si sám zvolí, jakou rovnici přímky napíše. V ilustračním řešení je uvedena obecná rovnice.

4 $\vec{n_p} \perp \vec{n_r} = (1; 3) \Rightarrow r\colon x + 3y + c = 0$

$A \in r\colon 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + c = 0 \Rightarrow c = 11$

$r\colon x + 3y + 11 = 0$

Žák ze znalosti normálového vektoru přímky p zapíše normálový nebo směrový vektor přímky r a rovnici přímky r. V úlohách 4 a 5 může dojít k chybné záměně rovnoběžné a kolmé přímky k přímce p.

5 $\overrightarrow{n_{o_{AB}}} = \overrightarrow{AB} = (4; 4) \Rightarrow o_{AB}: 4x + 4y + c = 0 \qquad /:4$

$x + y + c = 0$

$S_{AB}[3; -2]$

$S_{AB} \in o_{AB}: 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + c = 0$

$3 - 2 + c = 0$

$c = -1$

$o_{AB}: x + y - 1 = 0$

Žák vychází ze znalosti pojmu osa úsečky jako přímky kolmé k úsečce procházející jejím středem. Po výpočtu souřadnic středu S úsečky AB napíše žák rovnici přímky kolmé k přímce AB procházející bodem S.

6 6.1

$\overrightarrow{u_p} = (1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = (1; 1)$ F)

6.2

$\overrightarrow{u_q} = (1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (0; -1)$ resp. $\overrightarrow{n_q} = (0; 1)$ B)

6.3

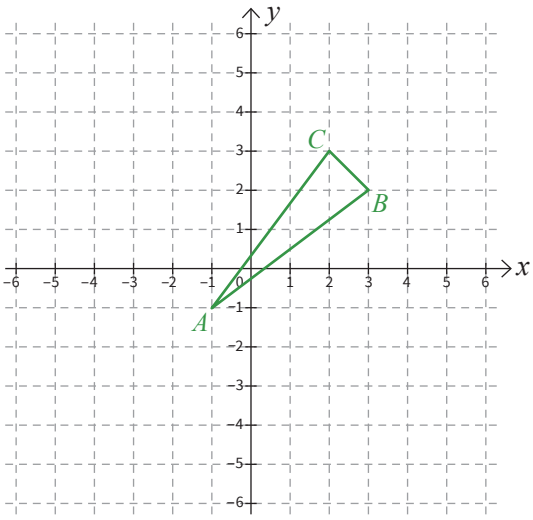
$\overrightarrow{u_r} = (1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_r} = (1; -1)$ E)

6.4

$\overrightarrow{u_s} = (0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_s} = (-1; 0)$ resp. $\overrightarrow{n_s} = (1; 0)$ A)

Všechny rovnice přímek v nabídce jsou obecné. Z obrázku žák vyčte souřadnice směrových, a tedy i normálových vektorů. Problém mohou činit přímky q a s, u kterých je jedna souřadnice vektorů nulová a v rovnicích chybí jedna proměnná.

7



Po znázornění bodu A žák správně znázorní vektory vycházející z tohoto bodu. Žák může mylně zaměnit souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ za souřadnice bodů B a C. Při správném znázornění vektorů pouze spojí koncové body vektorů.

8 $a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Délku stran c a b lze jednoduše vypočítat ze zadaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Pro délku strany a musí žák z obrázku určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$.

9 $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{4\cdot 3+3\cdot 4}{5\cdot 5} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 16°$

Velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku žák vypočte dle vzorce pro kosinus úhlu mezi vektory. Problém může být v užití samotného vzorce, kde je v čitateli skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí vektorů. Při použití kalkulačky si musí uvědomit, že nepočítá hodnotu funkce kosinus, ale velikost příslušného úhlu.

10 $\overrightarrow{AC} = (1; 7) = \overrightarrow{s_{AC}}$

$\overrightarrow{n_{AC}} = (7; -1)$

$\leftrightarrow AC\colon 7\cdot x - y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AC\colon 7\cdot 1 - 2 + c = 0$

$c = -5$

$\overrightarrow{BD} = (-7; 1) = \overrightarrow{s_{BD}}$

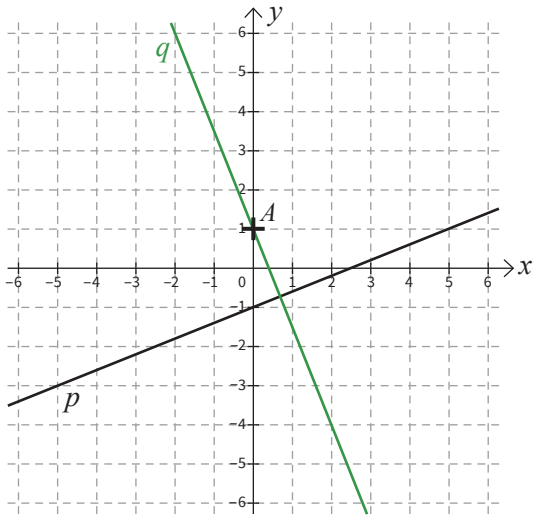
$\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 7)$

vyhovuje úhlopříčka AC

D) $7x - y - 5 = 0$

V zadání není uvedeno, zda se jedná o úhlopříčku AC, nebo BD. Žák si musí nejprve napsat rovnice obou přímek. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, tedy jsou kolmé i příslušné směrové a normálové vektory. Odpovědi A), C) a E) jsou rovnice přímek, na kterých leží strany čtverce.

11



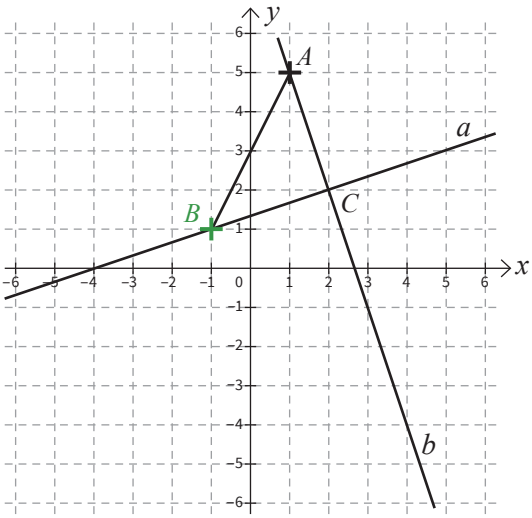
Přímka p je znázorněna na obrázku, bod A je zadán pomocí souřadnic. V první části úlohy žák správně znázorní bod A. Bod má souřadnici x rovnu nule, a leží tedy na ose y. Přímku q narýsuje pomocí pravítka s ryskou. Rovnici přímky lze určit ze směrového vektoru přímky p, který je normálovým vektorem přímky q.

$\overrightarrow{u_p} = (5; 2) = \overrightarrow{n_q} \Rightarrow q\colon 5x + 2y + c = 0$

$A \in q\colon 5\cdot 0 + 2\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$q\colon 5x + 2y - 2 = 0$

12



Žák vychází ze znalosti vlastností trojúhelníků (rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, přepona). Umístění bodu B lze určit pomocí kružítka. Střed je v bodě C, poloměr CA je přenesen na přímku a. Z obrázku žák určí souřadnice bodu B. Rovnici přímky, na které leží přepona, je rovnice přímky AB.

$B = [-1; 1] \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{u_c} = (2; 4)$

$\overrightarrow{n_c} = (4; -2) \Rightarrow c: 4x - 2y + c = 0 \qquad /:2$

$A \in c: 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$c: 2x - y + 3 = 0$

13 13.1
vektor $\overrightarrow{BA} = (2; 1)$

A N

13.2
vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$

A N

13.3
vektor $\overrightarrow{AB} = (-2; -1) \Rightarrow 3 \cdot AB = (-6; -3)$

A N

Žák může chybně počítat v úloze 14.1 se souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{AB}$ a ne vektoru $\overrightarrow{BA}$. Rozdíl mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ si může uvědomit při řešení úlohy 14.2 a popřípadě se vrátit k nesprávné odpovědi u úlohy 14.1 V úloze 14.3 se ověřuje znalost násobení vektoru číslem. Předpokladem je správné určení souřadnic vektoru $\overrightarrow{AB}$.

14 $B[0; 0], D[-3; 3], \Rightarrow \overrightarrow{BD} = (-3; 3)$

u_{BD}: $\quad x = -3t \quad$ resp. $\quad x = t$

$y = 3t; t \in \mathbb{R} \qquad y = -t; t \in \mathbb{R}$

Žák nemusí dopočítávat souřadnice bodů B a D. Úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé a půlí se. Stačí určit střed úhlopříčky $\overrightarrow{AC}$ a z normálového vektoru $\overrightarrow{AC}$ vypočítat směrový vektor.

15 $\overrightarrow{n_o} = \overrightarrow{AB} = (2; -4) \Rightarrow o: 2x - 4y + c = 0 \qquad /:2$

$S_{AB}[2; 0] \in o$: $1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$o: x - 2y - 2 = 0$

$P_x[x; 0] \Rightarrow P_x = S_{AB}[2; 0]$

$P_y[0; y]$: $0 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_y[0; -1]$

První část ověřuje znalost pojmu osa úsečky. Druhá část úlohy je o pojmu průsečík s osou x a y jako určení průsečíku dvou přímek nebo bodu s jednou souřadnicí nulovou.

16 $\overrightarrow{n_p} = (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{u_p} = (3; 2)$

$\overrightarrow{u_q} = (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (3; 2)$

$\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{u_q} = p \perp q$ – Přímky jsou na sebe kolmé (různoběžné).

Ze zadání obecné rovnice přímky p a parametrické rovnice přímky q žák buď vyjádří směrové a normálové vektory přímek a určí jejich kolmost, nebo vyřeší soustavu rovnic a vypočítá souřadnice průsečíku přímek a určí jejich různoběžnost.

17 15.1
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ F)

15.2
$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$ C)

15.3
$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ A)

15.4
$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ D)

Úloha ověřuje znalost určení souřadnic vektoru a jeho velikosti. Z výběru odpovědí je jasné, že velikost vektorů není vyjádřena zaokrouhleným desetinným číslem, ale přesně pomocí odmocniny přirozeného čísla.

18 Body A a B jsou osově souměrné podle osy $o \Rightarrow B[4; 3]$

$\overrightarrow{u_o} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; -3) \Rightarrow \leftrightarrow AB: 2x - 3y + c = 0$

$A \in \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$

$\leftrightarrow AB: 2x - 3y + 1 = 0$

Umístění bodu B lze určit graficky při využití osové souměrnosti bodů A a B. Po správném určení souřadnic bodu B lze napsat rovnici přímky AB. Rovnici přímky AB lze napsat jen s využitím směrového vektoru osy o jako normálového vektoru přímky procházející bodem A.

19 $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$

a: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Ze zadání lze vypočítat délku strany a jako velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. V zadání je uvedeno, že přeponou v trojúhelníku je strana c. Velikost strany se dopočítá pomocí Pythagorovy věty.

20 Hledáme takové body B a A, pro jejichž souřadnice platí, že jejich rozdíl je 2 a –2.
Z obrázku je zřejmé, že tuto podmínku splňuje pouze vektor s počátečním bodem $A[3; 0]$ a koncovým bodem $B[5; -2]$.

Skutečně platí $B - A = (5 - 3; -2 - 0) = (2; -2)$.

ŘEŠENÍ – KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

1 **1. způsob –** s pomocí kalkulačky, kde pro výpočet čitatele použijeme tlačítko označené **nCr** a pro výpočet jmenovatele tlačítko s označením faktoriálu, tj. **!**

Pozn.: Vše záleží na typu kalkulačky!

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Práce s tlačítkem **nCr** – např. $\binom{8}{5}$ zadáme jako **8 nCr 5** = 56

*U žáka se ověřuje základní znalost vlastností kombinačních čísel a práce s faktoriály. Častý problém bývá v práci s kalkulačkou, a to nejen při využívání práce s funkcí **nCr**. Další problém bývá při rozpisu kombinačního čísla, kdy žáci zaměňují vzorec pro výpočet kombinací za vzorec pro výpočet variací. Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací může být záměna jmenovatele a čitatele.*

2. způsob – klasický rozpis dle vzorců

Použité vzorce: pro rozpis kombinačního čísla $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=$

pro rozpis faktoriálu $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot 2\cdot 1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{5}-\binom{8}{6}+\binom{8}{7}}{5!-3!}=\frac{\frac{8!}{0!\cdot 8!}-\cancel{\frac{8!}{1!\cdot 7!}}+\cancel{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}+\frac{8!}{5!\cdot 3!}-\cancel{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}+\cancel{\frac{8!}{7!\cdot 1!}}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

Jak vidíme, některé rozpisy jsou úplně stejné, můžeme je tedy škrtnout, protože po vyčíslení by se vzájemně odečetly.

3. způsob – pomocí pravidel pro kombinační čísla

Pravidla, která využijeme: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ proto platí: $\binom{8}{1}=\binom{8}{7}$ a $\binom{8}{2}=\binom{8}{6}$

$\binom{n}{0}=1$ proto platí: $\binom{8}{0}=1$

$$\frac{\binom{8}{0}-\cancel{\binom{8}{1}}+\cancel{\binom{8}{2}}+\binom{8}{5}-\cancel{\binom{8}{6}}+\cancel{\binom{8}{7}}}{5!-3!}=\frac{1+56}{120-6}=\frac{57}{114}=\frac{1}{2}$$

2 $\frac{(x+3)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)!}{(x-1)!}-2\cdot\frac{x!}{(x-2)!}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)!}{(x+1)!}+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!}-\frac{2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!}=$

$=(x+3)!\cdot(x+2)+(x+1)\cdot x-2x(x-1)=x^2+2x+3x+6+x^2+x-2x^2+2x=8x+6$

A) $8x+6$
B) $6x+6$
C) x^2+6
D) $20x-12$
E) $4x-7$

U žáka se ověřuje znalost práce s obecnými faktoriály. Častý problém bývá v rozepsání menšího členu nebo při rozepisování členů vynechání samotného členu s neznámou x. Modifikací může být odebrání či přidání dalšího zlomku nebo záměna výrazů v čitatelích a jmenovatelích.

3 Výpočty provádíme pomocí kalkulačky nebo pomocí základních kombinatorických vzorců.

3.1 $12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$ A ■ N □

$12 \cdot 10 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$120 = 120$

3.2 $\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$ A ■ N □

platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{20}{17} = \frac{20!}{17! \cdot (20-17)!}$ a $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!}$

proto rovnost platí: $1140 = 1140$

3.3 $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$ A ■ N □

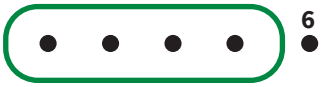
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$

3.4 $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4!-2!$ A □ N ■

platí: $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$, proto: $2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 = 22$

U žáka se ověřuje znalost vlastností kombinačních čísel a práce s nimi.
Problémem bývá pouze neznalost základních vzorců nebo nevyužívání kalkulačky.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací je řada, např. zapojení dalších vlastností kombinačních čísel či vytváření rozsáhlejších příkladů se součty.

4 Protože záleží na pořadí prvků a žádný se nesmí opakovat, jde o **variace bez opakování**, kde nám zbývá určit 4 pozice, a k dispozici máme 8 různých čísel:



zbývají čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

$V(4,8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

K výpočtu jsme využili pravidlo součinu.

A) 70
B) 6720
C) 126
D) 1680
E) 40

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá zaměňování variací za kombinace, dále pak výběr třídy variace, popř. určení počtu prvků, které máme k dispozici.
Modifikací může být jiný počet číslic v kódu zámku, popř. menší počet číslic, které máme k dispozici. Další modifikací je možnost opakování číslic.

5 Protože smíšenou štafetu tvoří dva muži a dvě ženy a určitě pojede Gábina Koukalová, chybí trenérovi vybrat dva muže a jednu ženu.

Jedná se tedy o **kombinace bez opakování**.

Zároveň musíme zohlednit, že z žen je již vybraná Gábina Koukalová, a tudíž zbývá vybrat jednu ženu ze šesti zbývajících!

$$K(2,6)\cdot K(1,6) = \binom{6}{2}\cdot\binom{6}{1} = 15\cdot 6 = 90$$

A) 315
B) 90
C) 36
D) 21
E) 220

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá ve výpočtu pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Následně pak také zohlednění, že zbývá vybrat již pouze jednu ženu ze šesti zbývajících.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být jiný počet mužů a žen.

6 Jedná se o **kombinace bez opakování**.

6.1 Trenér vybírá 3 závodníky z kategorie H12, tj. 7 chlapců, proto:

$$K(3,7) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$$

6.2 Nyní vybírá pouze děvčata a to 3 závodnice ze šesti, a 3 z devíti, jde tedy o celkový počet z kategorie D12 plus celkový počet z kategorie D14:

$$K(3,6) + K(3,9) = \binom{6}{3} + \binom{9}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} + \frac{9!}{3!\cdot 6!} = 104$$

6.3 V kategorii 14 let je 9 dívek a 5 chlapců, proto:

$$K(3,9) + K(3,5) = \binom{9}{3} + \binom{5}{3} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} + \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 94$$

U žáka se ověřuje, zda rozlišuje variace a kombinace.
Častý problém bývá orientace v textu nebo v tabulce.
Dále pak zaměňování variací za kombinace a také problém s výpočtem pomocí součtu místo součinu dvou jednotlivých kombinací.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr).
Modifikací může být výběr jiné závodní skupiny, popř. jiný počet členů štafety nebo jiný počet soutěžících v jednotlivých kategoriích.
Další modifikací by mohly být smíšené štafety v daných věkových kategoriích.

A)	35	6.1	**A**
B)	104	6.2	**B**
C)	94	6.3	**C**
D)	840		
E)	1680		

7 Vychází se z klasické definice pravděpodobnosti, tj. $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet příznivých výsledků (které se od nás očekávají) a n je počet všech možných výsledků.

Počet všech možných výsledků je $6 \cdot 6 = 36$, proto jmenovatel všech příkladů (7.1–7.4) bude stejný.

7.1 Padne součet 5. A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

7.2 Padne součet 7. A ■ N □

Příznivé výsledky jsou součty: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7.3 **Nepadne** součet 6. A □ N ■

Příklad je vhodné počítat pomocí pravděpodobnosti **opačného jevu C'**.
Platí $P(C) = 1 - P(C')$.

Příznivé výsledky jsou součty: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, proto celkový počet příznivých výsledků je $m = 5$.

$$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

7.4 Padne součet 5 nebo 6 . A ■ N □

Příznivé výsledky: pro součet 5 je $m = 4$ (viz. výše), pro součet 6 je $m = 5$ (viz. výše).

$$P(D) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pomocí opačného jevu nebo při výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou neslučitelných jevů. Modifikací mohou být např. jiné součty.

8 8.1 Požaduje se, aby zástupcem velitele byl chlapec, proto vybíráme jednoho chlapce z celkového počtu chlapců:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{1}}{\binom{35}{1}} = \frac{20}{35} \cong 57\ \%$$

8.2 Jeden chlapec je již vybraný, proto zbývá 34 dětí.
Nyní vybíráme dva pomocníky do kuchyně a oba mají být dívky, proto vybíráme dvě dívky z 15:

$$P(B) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{34}{2}} = \frac{105}{561} \cong 19\ \%$$

8.3 Nyní nám zbývá již pouze 32 dětí a vybíráme dvě děti do táborové hlídky tak, aby to byl jeden chlapec a jedna dívka.
Chlapců nám již zbývá pouze 19 (jeden byl vybrán jako zástupce velitele) a dívek nám zbývá pouze 13, protože dvě byly vybrány do kuchyně, proto:

$$P(C) = \frac{\binom{19}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{247}{496} \cong 50\ \%$$

U žáka se ověřuje pochopení pravděpodobnosti náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém spočívá v uvědomění si, že dětí postupně ubývá, protože každý může zastávat pouze jednu funkci.
Velkou výhodou (a doporučením pro studenty) může být znalost výpočtu hodnot kombinačních čísel pomocí kalkulačky (funkce nCr). Modifikací mohou být jiné kombinace funkcí, které mají děti zastávat, nebo jiný počet funkcí.

A)	19 %	8.1	**D**
B)	36 %	8.2	**A**
C)	50 %	8.3	**C**
D)	57 %		
E)	68 %		

9 9.1 Závod dokončí Mercedes i Red Bull.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes, je 93 %, tj. 0,93.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Red Bull, je taky 93 %, tj. 0,93.
Proto pravděpodobnost, že závod dokončí Mercedes i Red Bull, získáme jako pravděpodobnost průniku dvou **nezávislých jevů**,

tj.: $P(A) = 0{,}93 \cdot 0{,}93 = 0{,}86$, proto 86 %

9.2 Ferrari **nedokončí** závod.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Ferrari, je 81 %, tj. 0,81.
Pravděpodobnost, že Ferrari **nedokončí** závod, vypočítáme jako pravděpodobnost **jevu opačného**:

$P(B) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$, proto 19 %

9.3 Závod **nedokončí** ani McLaren, ani Renault.

Pravděpodobnost, že závod dokončí McLaren, je 76 %, tj. 0,76. ⇒ že **nedokončí** závod je 0,24.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Renault, je 74 %, tj. 0,74. ⇒ že **nedokončí** závod ani McLaren ani Renault, je:

$P(C) = 0{,}24 \cdot 0{,}26 = 0{,}06$, proto 6 %

9.4 Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India.

Pravděpodobnost, že závod dokončí Williams je 86 %, tj. 0,86.
Pravděpodobnost, že závod dokončí Force India je 86 %, tj. 0,86 a tudíž že ho **nedokončí** je 0,14. Závod dokončí Williams, ale **nedokončí** Force India:

$P(D) = 0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}12$, a to je 12 %

U žáka se ověřuje práce s pravděpodobností náhodného jevu. Problémy mohou nastat u výpočtu pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů, kdy většina žáků pravděpodobnosti jevů sčítá místo násobí. Další problém může být uvědomění si, že je nutné vypočítat pravděpodobnost jevu opačného. Modifikací mohou být jiné kombinace dokončení či nedokončení závodu jiných týmů.

A)	75 %	9.1	C
B)	6 %	9.2	E
C)	86 %	9.3	B
D)	92 %	9.4	F
E)	19 %		
F)	12 %		

10 Víme, že **průměr** dosažených bodů je **78** (dosáhl ho Chomutov).

Počet bodů, které dosáhl Litvínov, označíme x.
Počet bodů, které dosáhla Sparta, označíme $2x$.
Počet bodů, které získal Litvínov, se vypočte z aritmetického průměru bodů všech týmu:

$$\frac{118 + 2x + 88 + 87 + 85 + 83 + 81 + 78 + 69 + 68 + 66 + 57 + x + 47}{14} = 78 \quad / \cdot 14$$

$$927 + 3x = 1092$$
$$3x = 165 \quad / : 3$$
$$x = 55$$

V sezoně 2015/2016 dosáhl Litvínov 55 bodů.

U žáka se ověřuje práce se statistickým souborem prezentovaným formou tabulky. Jde o výpočet aritmetického průměru. Problémem může být pouze přehlédnutí nějaké hodnoty z tabulky. Modifikací může být např. výpočet mediánu.

11 Podle vzorců pro průměr a medián vypočítáme hodnoty pro jednotlivé tenistky.

Průměry spočítáme snadno. Nejčastější hodnotu (modus) určíme snadno. Pro medián platí, že soubor hodnot **musí být uspořádaný podle velikosti!**

Dále platí vzorec pro sudý rozsah ($n = 12$),
tj. v našem případě aritmetický průměr šesté a sedmé hodnoty:

$$\tilde{X} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

Správné hodnoty jsou tedy:

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Williams Serena	1,33	1	1

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Kerber Angelique	1,92	2	2

WTA 2016	*Průměr*	*Modus*	*Medián*
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3

Proto je správná **varianta D**.

U žáka se ověřuje práce se statistickými daty získanými na základě grafu.
Častým problémem bývá medián, kdy žáci nerozlišují sudý a lichý rozsah souboru a ještě častěji neseřazují hodnoty podle velikosti.
Možné chyby mohou plynout též ze špatné interpretace grafu.
Modifikací může být specifikace určitého výpočtu, např. výpočet průměru pouze u první tenistky, modusu u druhé a mediánu u třetí.

12 **12.1** Písmena v našem hesle tvoří uspořádanou šestici, ve které záleží na pořadí písmen.
To znamená, že tyto uspořádané šestice představují variace s opakováním šesté třídy z osmi prvků a jejich počet spočítáme:

$V'(6,8) = 8^6 = 262144$

12.2 $6! = 720$

ŘEŠENÍ – TEST 1

1 Vyjádříme všechna čísla jako zlomky se jmenovatelem 42, protože 42 je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 6, 7.

$-\frac{17}{6} = -\frac{119}{42}, -\frac{7}{3} = -\frac{98}{42}, \frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$

Do intervalu $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{105}{42}; \frac{28}{42}\right)$ tedy patří čísla $-\frac{98}{42} = -\frac{7}{3}$ a $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

$-\frac{7}{3} + \frac{2}{7} = -\frac{98}{42} + \frac{12}{42} = -\frac{86}{42} = -\frac{43}{21}$

Není vhodné převádět zlomky na desetinná čísla.
$-\frac{43}{21}$ případně lze vyjádřit jako smíšené číslo $-2\frac{1}{21}$.

2 Přímý úhel má velikost 180° nebo π radiánů. Tento vztah využijeme k vyjádření úhlu $\frac{7}{10}\pi$ radiánů ve stupňové míře.

$\frac{7}{10}\pi \text{ rad} = \frac{7}{10} \cdot 180° = 126°$

$\alpha = 180° - 126° = 54°$

$\alpha = 54°$

Druhá možnost řešení:
Vypočítáme nejprve velikost úhlu α v obloukové míře:
$\alpha = \left(\pi - \frac{7}{10}\pi\right) \text{rad} = \frac{3}{10}\pi \text{ rad}$
a výsledek převedeme na stupňovou míru: $\alpha = \frac{3}{10}\pi \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$.

3 **Dosazovací metodou** (využijeme toho, že v druhé rovnici je vyjádřena neznámá y, dosadíme za y do první rovnice, vyřešíme rovnici s jednou neznámou x):

$x = 2\,(2x + 7) + 4$

$x = 4x + 14 + 4$

$-3x = 18$

$x = -6$

Dosadíme do rovnice $y = 2x + 7$ hodnotu x a vypočítáme y: $y = 2 \cdot (-6) + 7 = -5$

$K = \{[-6; -5]\}$

Použili jsme jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, proto provádět zkoušku není nutné.
Bylo možné využít x vyjádřené z první rovnice pro dosazení do druhé rovnice:
$y = 2\,(2y + 4) + 7$, pak $y = -5$ a dopočítáme $x = -6$.
*Je možné použít též **sčítací metodu** (uspořádáme umístění neznámých v obou rovnicích, druhou rovnici vynásobíme dvěma a obě rovnice sečteme, vyřešíme rovnici s jedinou neznámou x):*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + y &= 7 \\ -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme $y = -5$.

4 Funkce $y = \cos x$ nabývá hodnoty -1 pro všechna $x = \pi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

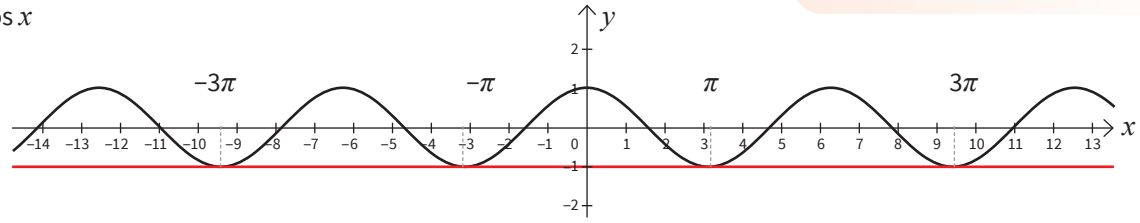
Použijeme substituci $x = \frac{\pi}{3} + t$; řešíme tedy rovnici $\frac{\pi}{3} + t = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z této rovnice vyjádříme $t = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hledáme řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$: pro $k = 0$ je $t = \frac{2\pi}{3}$ a pro žádné jiné celé číslo k nepatří t do intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

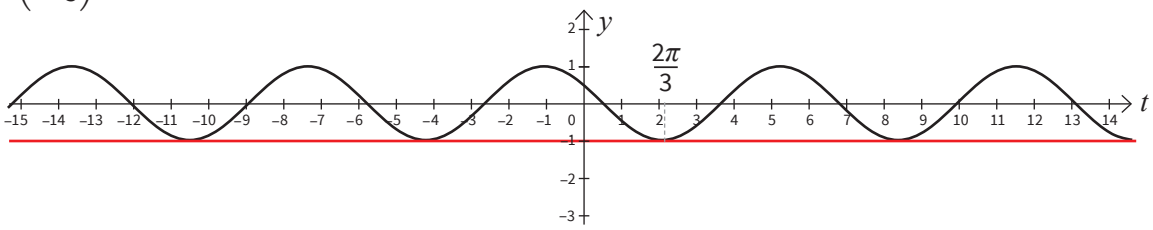
$t = \frac{2\pi}{3}$

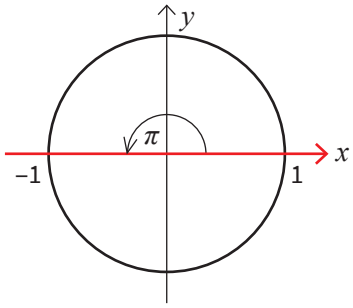
Lze ilustrovat na grafu funkce, případně na jednotkové kružnici.

$y = \cos x$



$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$



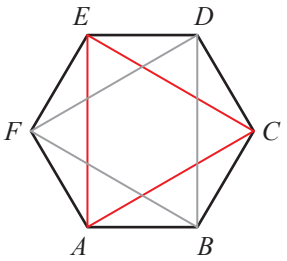


5 Pravděpodobnost náhodného jevu počítáme jako poměr počtu výsledků pokusu jevu příznivých m a počtu všech možných výsledků pokusu n. Náhodným pokusem se v tomto případě rozumí výběr tří vrcholů ze šesti vrcholů šestiúhelníku.

$n = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

Nezáleží na pořadí výběru vrcholů trojúhelníku.

Rovnostranný trojúhelník lze sestrojit právě dvěma způsoby (červený trojúhelník ACE a modrý trojúhelník FBD), $m = 2$.



Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

6 $\frac{1}{2} - 3x \geq -2 + x$

Od obou stran nerovnice odečteme x a $\frac{1}{2}$

$-4x \geq -2 - \frac{1}{2}$

$-4x \geq -\frac{5}{2}$

Obě strany nerovnice dělíme číslem −4

$x \leq x : (-4)$

$x \leq \frac{5}{8}$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší nebo rovna $\frac{5}{8}$,

tedy všechna čísla z intervalu $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Při dělení záporným číslem se obrací znak nerovnosti.

Mohli bychom postupovat i takto: K oběma stranám nerovnice přičteme výraz $3x + 2$, dostaneme nerovnici $\frac{1}{2} + 2 \geq x + 3x$, tedy $\frac{5}{2} \geq 4x$. Dělíme obě strany rovnice kladným číslem 4 (bez obracení znaku nerovnosti) a dostaneme $\frac{5}{8} \geq x$. Je nutno dát pozor na správné přečtení této nerovnosti – vyjadřuje pořád skutečnost, že x je ***menší nebo rovno*** *$\frac{5}{8}$, tedy $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.*

7 Mezi množstvím těsta a počtem rohlíčků je přímá úměrnost, tedy Katka bude potřebovat $240 \cdot \frac{90}{60}$ g těsta.
360 rozdělíme v poměru 4:2:5:5, na máslo připadá 90 g.

Katka bude potřebovat 90 g másla.

Dělení hmotnosti 360 g v daném poměru: $4 + 2 + 5 + 5 = 16$, $\frac{360}{16} \cdot 4$ g = 90 g.

Jiná možnost: Určíme nejdříve hmotnost másla při pečení 60 rohlíčků: $\frac{240}{16} \cdot 4$ g = 60 g. Proto pro 90 rohlíčků bude třeba 90 g másla.

8 V geometrické posloupnosti je podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů rovný kvocientu posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Tedy $\frac{a_2}{a_1} = q$ a také $\frac{a_3}{a_2} = q$, proto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Dosadíme $\left(a_1 = 2\sqrt{2}, a_2 = 4, a_3 = m\right)$:

$\frac{m}{4} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$

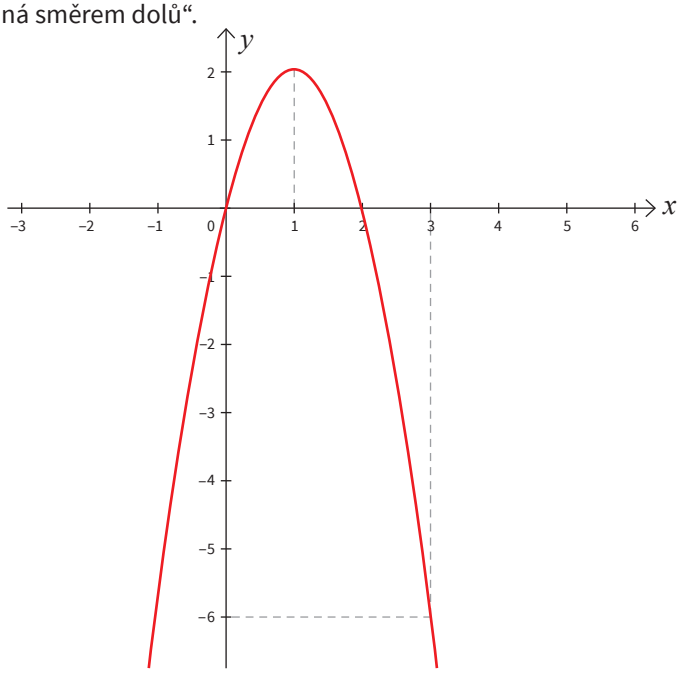
$\frac{m}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$m = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}}$

$m = 4\sqrt{2}$

Také jsme mohli z prvních dvou členů určit kvocient $q = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pak $\frac{m}{4} = \sqrt{2}$; $m = 4\sqrt{2}$.

9 Grafem každé kvadratické funkce je parabola. Protože funkce f nabývá maxima, bude jejím grafem parabola „otevřená směrem dolů“.



Ze souměrnosti paraboly podle její osy vyplývá, že $f(3) = f(-1)$. Úlohu pak lze řešit pomocí soustavy rovnic:
$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$
$f(3) = -6 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -6$
$f(-1) = -6 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$
(Dostaneme $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$)

Ze souměrnosti by bylo možné použít také vztah $f(2) = f(0)$.

Graf hledané funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy, proto $f(0) = 0$, a tedy $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, tedy $c = 0$.

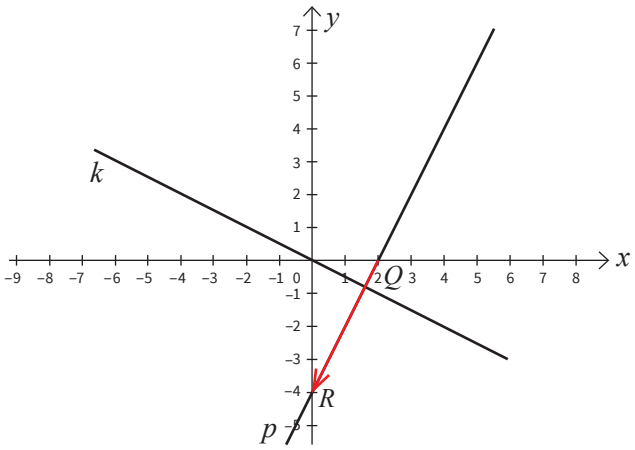
Kvadratická funkce nabývá svého maxima pro $x = -\frac{b}{2a}$, proto $-\frac{b}{2a} = 1$ … označíme (1).

Pro $x = 3$ nabývá hledaná funkce hodnotu −6, proto $-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ … označíme (2).

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostaneme $a = -2$ a $b = 4$.

$a = -2$, $b = 4$, $c = 0$

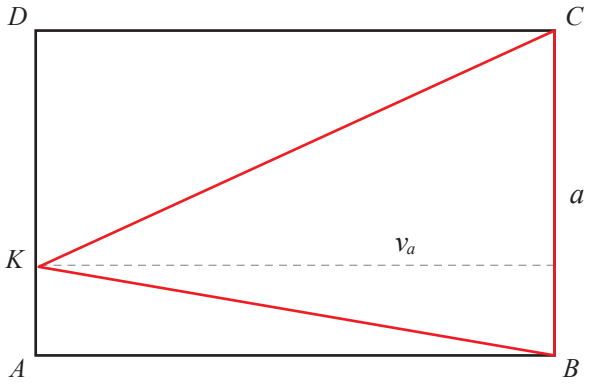
10 Hledáme obecnou rovnici přímky k ve tvaru k: $ax + by + c = 0$. Koeficienty a a b v této rovnici jsou souřadnice normálového vektoru přímky k $\left(\vec{n}_k = (a; b)\right)$. Přímka k má být kolmá k přímce p, proto jejím normálovým vektorem je vektor $\vec{n}_k = R - Q$ (nebo jeho libovolný nenulový násobek).
Souřadnice vektoru $\vec{n}_k$ určíme jako rozdíl souřadnic bodů R a Q: $\vec{n}_k = R - Q = (-2; -4)$.



***Řešení užitím úsekového tvaru rovnice přímky** p. Využijeme toho, že přímka p je určena svými průsečíky se souřadnicovými osami: $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$, případně rovnici převedeme na směrnicový tvar $y = 2x - 4$. Vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek je $a' = -\frac{1}{a}$.*
Přímka k bude mít směrnici $-\frac{1}{2}$ a směrnicovou rovnici $y = -\frac{1}{2}x$. Po úpravě získáme obecnou rovnici $x + 2y = 0$.

Ze souřadnic směrového vektoru přímky p získáme $a = -2$ a $b = -4$, obecnou rovnici přímky k můžeme zapsat ve tvaru k: $-2x - 4y + c = 0$. Zbývá určit koeficient c, k tomu využijeme údaj, že přímka k prochází počátkem souřadnicové soustavy $P[0; 0]$.
$P[0; 0] \in k \Rightarrow -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$
Získali jsme obecnou rovnici přímky k ve tvaru $-2x - 4y = 0$, po vydělení −2 máme k: $x + 2y = 0$.

11 Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (v tomto případě $a = |BC|$ a v_a je vzdálenost bodu K od strany BC, tedy $v_a = |AB| = p$). Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníku BCK, musíme znát délku strany BC a velikost výšky k této straně. Výpočty budeme provádět v centimetrech.



Všimněte si, že obsah trojúhelníku BCD nezávisí na umístění bodu K na úsečce AD, „posunutím" bodu K po úsečce AD se velikost výšky trojúhelníku BCK na základnu BC nezmění.

Označíme $v_a = |AB| = p$; $a = |BC| = p - 2$.

Jediné, co potřebujeme určit, je číslo p. K tomu využijeme údaj o obvodu obdélníku $ABCD$ a vzorec pro výpočet obvodu obdélníku.

$O = 2\left(|AB| + |BC|\right)$

$O = 2\left(p + (p-2)\right) = 2(2p-2) = 4p - 4$

Dosadíme $O = 48$:

$48 = 4p - 4$

Po vyřešení rovnice $p = 13$, potom $v_a = |AB| = 13$, $a = |BC| = p - 2 = 13 - 2 = 11$.

Nyní můžeme vypočítat obsah trojúhelníku BCK: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{11 \cdot 13}{2} = 71{,}5$.

Trojúhelník má obsah 71,5 cm².

12 $\sqrt{9a^4 + 16\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{9a^4 + 16a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

Připomeňte si, že $\sqrt{m^2} = |m|$. Pro $\sqrt{25a^4}$ bychom měli zapsat $\sqrt{25a^4} = |5a^2|$, ale víme, že $5a^2 \geq 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Tedy $|5a^2| = 5a^2$.

13 Označíme počet všech příkladů ve sbírce x. Pomocí proměnné x zapíšeme údaje z textu:

Při řešení slovní úlohy nezapomeňte zapsat, jaký význam má (co označuje) zvolená neznámá, a správně formulovat odpověď na položenou otázku.

Počet příkladů vyřešených do konce února … $\frac{x}{3}$

Počet zbývajících příkladů na konci února … $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

Počet příkladů vyřešených v březnu … $\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$

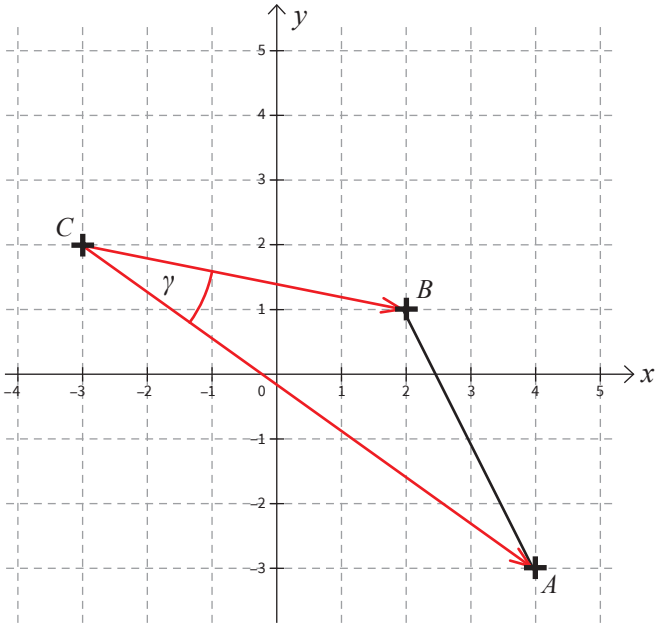
Počet příkladů vyřešených do konce března … $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x$. Na duben a květen tedy zbyla polovina všech příkladů, z ní jednu polovinu (tedy čtvrtinu z celkového počtu příkladů) vyřešila Ema v dubnu.

Sestavíme rovnici: $\frac{x}{4} = 54$, tedy $x = 216$.

Provedeme kontrolu správnosti: (v únoru $\frac{216}{3} = 72$ příkladů, v březnu $\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 36$ příkladů, v dubnu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 216}{3} = 54$ příkladů, v květnu 54 příkladů, 72 + 36 + 54 + 54 = 216).

Sbírka obsahovala 216 příkladů.

14 Vnitřní úhel u vrcholu C (v obrázku označen γ) je úhel sevřený vektory $\vec{u} = A - C$ a $\vec{v} = B - C$.



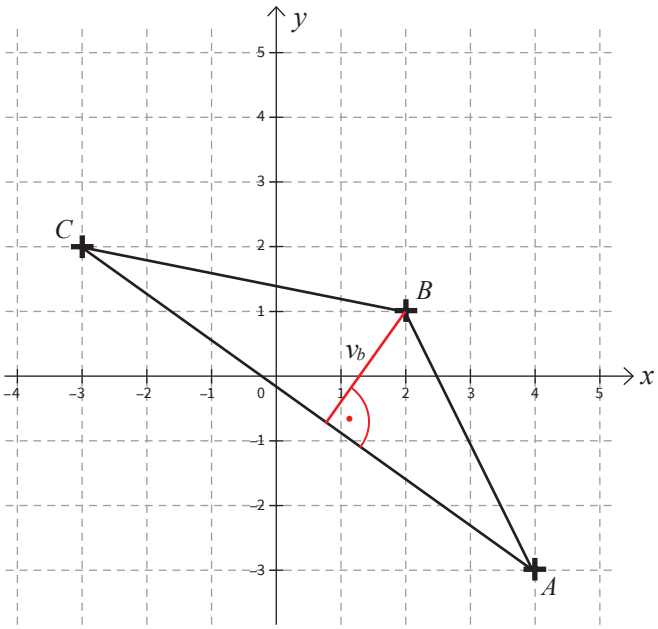
$\vec{u} = (7; -5)$, $\vec{v} = (5; -1)$

Použijeme vzorec pro výpočet úhlu dvou vektorů:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{35 + 5}{\sqrt{49 + 25} \cdot \sqrt{25 + 1}} = \frac{40}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$$

$\gamma = 24°14'$

Velikost výšky v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC.



Při výpočtu $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{40}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{26}} \doteq 0{,}9119$

není vhodné poslední hodnotu zapisovat, ponecháme ji v paměti kalkulátoru a rovnou určíme γ. Je-li nutné ji zapsat (a přitom zaokrouhlit), je pro požadovanou přesnost nutné zaokrouhlit alespoň na 4 desetinná místa.

Pozn.: V analytické geometrii obvykle zapisujeme vzdálenosti bez konkrétních jednotek. V této úloze je tedy hledaná vzdálenost rovna 2,1 jednotek – rozumí se jednotky použité souřadnicové soustavy.

Směrový vektor přímky AC je vektor $\vec{u} = A - C = (7;\ -5)$, přímka AC má tedy obecnou rovnici $5x + 7y + c = 0$, konstantu c určíme dosazením souřadnic bodu A (případně C): $5\cdot 4 + 7\cdot(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 1$, tedy $\leftrightarrow AC$: $5x + 7y + 1 = 0$.

Použijeme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu B od přímky:

$$v_b = v\,(B, \leftrightarrow AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5\cdot 2 + 7\cdot 1 + 1|}{\sqrt{5^2+7^2}} = \frac{18}{\sqrt{74}} = \frac{18\sqrt{74}}{74} = \frac{9\sqrt{74}}{37} \doteq 2{,}1$$

Úhel při vrcholu C má velikost 24°14' a výška v_b má velikost přibližně 2,1 (jednotek).

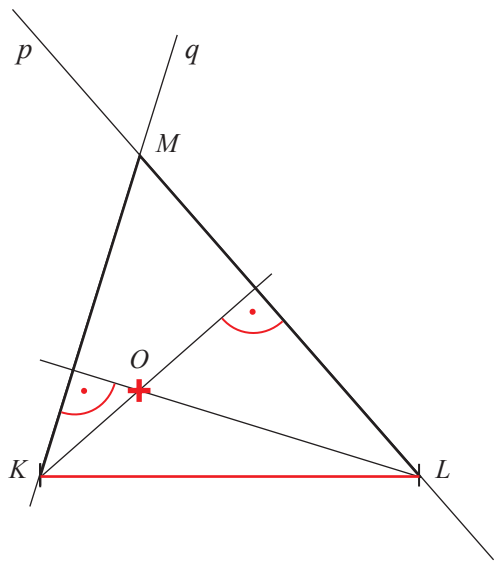
15 Předpokládáme, že existuje požadovaný trojúhelník – načrtneme ho, vyznačíme zadané prvky.

Hledáme bod M:

$M \in p\ (p \perp\leftrightarrow KO \wedge L \in p)$
(čteme: M leží na přímce p, která je kolmá k přímce KO a prochází bodem L)

$M \in q\ (q \perp\leftrightarrow LO \wedge K \in p)$
(čteme: M leží na přímce q, která je kolmá k přímce LO a prochází bodem K)

Tedy $M \in p \cap q$



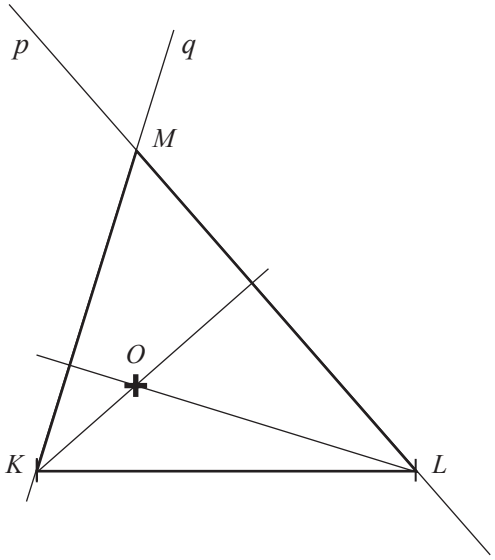
Provedeme konstrukci:

1.) $p; p \perp\leftrightarrow KO \wedge L \in p$

2.) $q; q \perp\leftrightarrow LO \wedge K \in p$

3.) $M; M \in p \cap q$

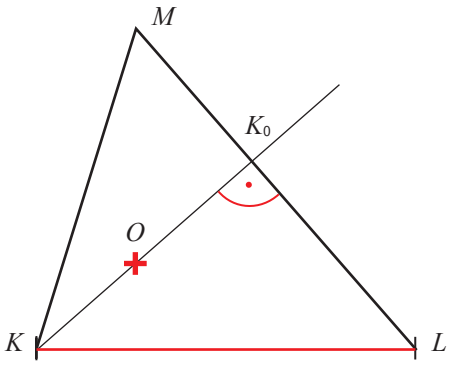
4.) ΔKLM

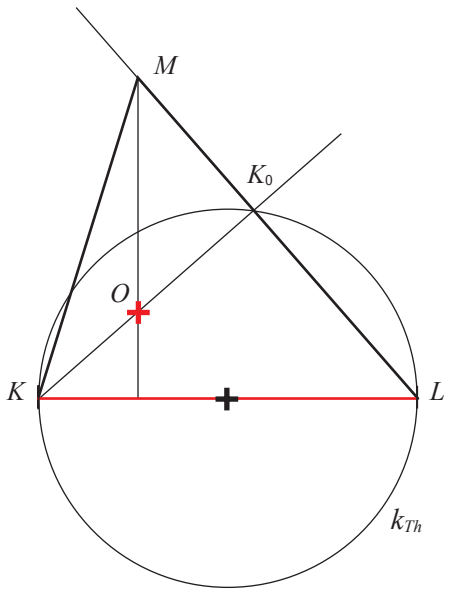


Úloha má v rovině jedno řešení.

Jiný způsob řešení:

Trojúhelník načrtneme, pojmenujeme patu výšky K_0.





Rozbor úlohy:

Neznámé body jsou K_0 a M.

Určíme nejprve bod K_0:

- K_0 je pata výšky z vrcholu K, musí ležet na polopřímce KO … $K_0 \in\rightarrow KO$
- Úhel u K_0 je pravý, bod K_0 musí ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou KL … $K_0 \in k_{Th}(KL)$
- $K_0 \in\rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$

Dále hledáme bod M:

- M leží na kolmici p vedené bodem O k úsečce KL (její částí je výška v_m)
- M leží na polopřímce LK_0
- $M \in\rightarrow p \cap\rightarrow LK_0$

Provedeme konstrukci:

1.) $\rightarrow KO$

2.) $k_{Th}(KL)$

3.) $K_0; K_0 \in \rightarrow KO \cap k_{Th}(KL)$

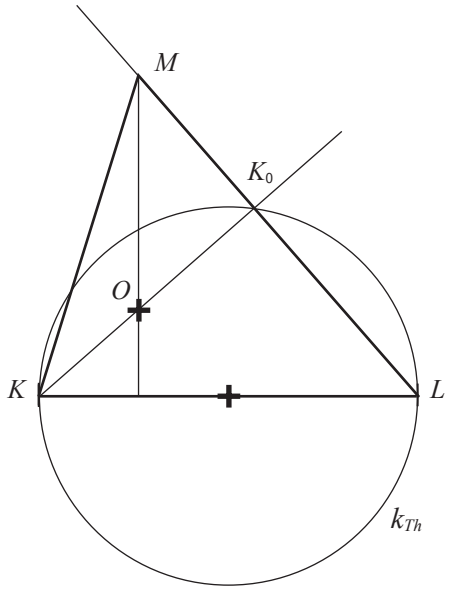
4.) $p; O \in p, p \perp KL$

5.) $\rightarrow LK_0$

6.) $M; M \in p \cap \rightarrow LK_0$

7.) ΔKLM

Úloha má v rovině jedno řešení.



Náčrt provádíme tužkou „od ruky“. Je dobře barevně vyznačit známé prvky. Konstrukci provádíme pečlivě – ořezanou tužkou, použijeme pravítko, kružítko s ořezanou tuhou, případně úhloměr.
Poznámka: V „ostrých“ maturitních testech je nutné v záznamovém archu všechny čáry obtáhnout propisovací tužkou – záznamové archy se pro účely opravování skenují a na naskenovaném obrázku není obyčejná tužka dobře viditelná.

16 Pro dláždění dna bazénu bude potřeba 450 : 30 = 15 dlaždic v jedné řadě (podél delší stěny bazénu).

Stejných takových řad je nutno položit 300 : 30 = 10.

Na vydláždění dna bazénu je potřeba 15 · 10 = 150 dlaždic.

Pro dláždění kratší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 300 : 30 = 10 dlaždic.

Na vydláždění obou kratších stěn potřebujeme 2 · 4 · 10 = 80 dlaždic.

Pro dláždění delší stěny bazénu jsou potřeba 120 : 30 = 4 řady dlaždic, v každé řadě 450 : 30 = 15 dlaždic.

Na vydláždění obou delších stěn potřebujeme 2 · 4 · 15 = 120 dlaždic.
Pro celý bazén potřebujeme 150 + 80 + 120 = 350 dlaždic.

Počet balení získáme vydělením celkové spotřeby dlaždic počtem dlaždic v jednom balení 350 : 12 = 29,2, zaokrouhlíme nahoru na 30.

D)

Můžeme řešit i tak, že vypočítáme obsah dna a stěn bazénu v cm^2 a tento vydělíme obsahem jedné dlaždice.
$S = (450 \cdot 300) + 2 \cdot (300 \cdot 120) + 2 \cdot (450 \cdot 120) = 3\ 15000$
$350 : (30 \cdot 30) = 350$
Při tomto způsobu výpočtu je potřeba dát pozor na to, jestli dlaždice nebude nutné řezat, tedy jestli všechny rozměry dlážděných obdélníků jsou celočíselnými násobky délky strany čtvercové dlaždice.

17 Předpis A zadává lineární funkci, jejím grafem je přímka – možnost A vyloučíme.

Předpis B zadává kvadratickou funkci, jejím grafem je parabola – možnost B vyloučíme.

Předpis C zadává exponenciální funkci, která nikdy nenabývá záporných hodnot, žádná část jejího grafu nemůže ležet pod souřadnicovou osou x – možnost C vyloučíme.

Předpis E zadává lineární lomenou funkci, jejím grafem je hyperbola (se dvěma větvemi), navíc $f(0) = (0+1)^{-1} = 1 \neq 0$, možnost E vyloučíme.

Zbývá možnost D), pro jistotu ještě ověříme:

$f: y = \log_2(x+1)$

je definována pro $x+1>0$, tedy pro $x>-1$, odpovídá funkci na obrázku

$x=0 \Rightarrow y=\log_2 1=0$, odpovídá funkci na obrázku

$x=1 \Rightarrow y=\log_2 2=1$, odpovídá funkci na obrázku

$x=3 \Rightarrow y=\log_2 4=2$, odpovídá funkci na obrázku

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\log_2\frac{1}{2}=-1$, odpovídá funkci na obrázku

18 Rovnice A) a C) mají záporný diskriminant, nemají žádný reálný kořen. Zbývá otestovat rovnice B) a D). Můžeme to udělat dvěma způsoby:

1.) Dosadíme číslo a do výrazu na levé straně rovnice:

$$L_B(a)=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)-2=1+2\sqrt{3}+3+2+2\sqrt{3}-2=4+4\sqrt{3}\neq 0$$

$$L_D(a)=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)-2=1+2\sqrt{3}+3-2-2\sqrt{3}-2=0$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

2.) Řešíme rovnice B) a D) užitím diskriminantu:

$$D_B=4+8=12,\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}\neq a$$

$$D_D=4+8=12,\ x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

Číslo a je kořenem rovnice D).

Vzorec pro výpočet diskriminantu kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ je $D=b^2-4ac$.

Je-li D kladné, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

19 Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy je nutné splnit podmínku

$\frac{x-3}{x}\geq 0$.

Navíc číslo ve jmenovateli zlomku musí být různé od nuly, tedy $x\neq 0$.

Nerovnici $\frac{x-3}{x}\geq 0$ budeme řešit pomocí nulových bodů ($x_{01}=0$, $x_{02}=3$)

a tabulky pro znaménka čitatele a jmenovatele.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3\rangle$	$\langle 3; -\infty\rangle$
x	–	+	+
$x-3$	–	–	+
$\frac{x-3}{x}$	+	–	+

Definiční oborem funkce je sjednocení intervalů $(-\infty; 0)\cup\langle 3; \infty)$.

C)

Jiný způsob řešení nerovnice $\frac{x-3}{x}\geq 0$:
Po stanovení podmínek ($x\neq 0$) můžeme obě strany nerovnice násobit číslem x^2, které je jistě větší než nula, znak nerovnosti se zachová. Získáme nerovnici $(x-3)\cdot x\geq 0$, kterou umíme vyřešit užitím grafu kvadratické funkce $f: y=(x-3)\cdot x$, tedy kvadratické funkce $f: y=x^2-3x$.
Víme, že grafem je parabola „otevřená nahoru“ a protínající osu x v bodech 0 a 3, odtud $x\in(-\infty; 0\rangle\cup\langle\infty; 0)$, po přihlédnutí k podmínkám $x\in(-\infty; 0)\cup\langle 3; \infty)$.

20 Ze vztahu $m = \frac{t}{a+b}$ chceme vyjádřit neznámou a.

$m = \frac{t}{a+b} \qquad / \cdot (a+b)$

$m(a+b) = t$

$ma + mb = t \qquad / -mb$

$ma = t - mb \qquad / : m$

$a = \frac{t - mb}{m}$

B)

Podmínka $a \neq -b$ pro existenci výrazu je splněna automaticky, protože se jedná o kladná čísla a a b, stejně tak podmínka $m \neq 0$.

21 Určíme, kolikrát nejvýše mohl být Mirek v posilovně. Průměrně 6 návštěv na každého z 6 kamarádů znamená, že dohromady vykonali 36 návštěv. Mirkovi z nich by připadl největší počet návštěv tehdy, když počet návštěv všech ostatních kamarádů bude co nejmenší. Protože má každý jiný počet návštěv, budou počty návštěv posilovny pro jednotlivé kamarády vyjádřeny nejmenšími přirozenými čísly: 1; 2; 3; 4; 5. Všichni kromě Mirka společně vykonali alespoň 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 návštěv, Mirek mohl vykonat maximálně 36 − 15 = 21 návštěv a utratit tak maximálně 2 100 Kč.

A)

22 Počty uběhnutých kilometrů v jednotlivých dnech tvoří aritmetickou posloupnost (každý den navyšuje o stejnou vzdálenost), jejíž první člen je $a_1 = 3$ a šestnáctý člen $a_{16} = 6$. Diference je rovna délce jednoho oválu a vypočítáme ji ze vztahu pro n-tý (šestnáctý) člen aritmetické posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$, tedy $a_{16} = a_1 + 15d$.

Dosadíme: $6 = 3 + 15d$ a vypočítáme diferenci $d = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (km).

Potřebujeme sečíst prvních 31 členů této posloupnosti, použijeme vzorec pro součet prvních n členů

$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$, tedy $s_{31} = (a_1 + a_{31}) \cdot \frac{31}{2}$. Chybí nám člen a_{31} - vypočítáme ho podle již použitého vzorce pro n-tý člen

$a_{31} = a_1 + 30d = 3 + 30 \cdot \frac{1}{5} = 9.$

$s_{31} = (3 + 9) \cdot \frac{31}{2} = 186$

Pan Rychlý naběhal během března 186 kilometrů.

E)

23 Upravíme výraz V: $V = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2} = \frac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{x+3}{2x+2}$

B)

Čitatel rozložíme užitím Vietových vzorců. Pro kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ platí $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Snadno uhádneme (a ověříme), že $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, a proto lze trojčlen $x^2 + 2x - 3$ rozložit na součin $(x+3)(x-1)$.

24 Provedeme konstrukci:

24.1 Žádná mocnina čísla 9 není rovna 0, rovnice I. nemá vůbec žádné řešení. A N

24.2 $|x-5| = 4 \Rightarrow x-5 = 4 \vee x-5 = -4 \Rightarrow x = 9 \vee x = 1$. A N

Rovnice II. má dvě řešení, ani jedno z nich není záporné.

24.3 $\sqrt{x+6} = 2 \Rightarrow x+6 = 4 \Rightarrow x = -2$. Kořen −2 je nutno ověřit zkouškou: $\sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2$. A N

Rovnice III. má jeden záporný kořen.

24.4 $5 = (x-1)^2 - x(x+3) \Rightarrow 5 = x^2 - 2x + 1 - x^2 - 3x \Rightarrow 5 = -5x + 1 \Rightarrow 4 = -5x \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$. A N

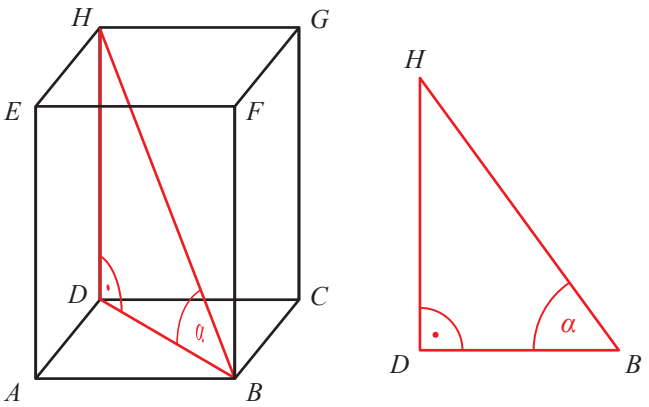
Rovnice IV. má jeden záporný kořen.

25 25.1 Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku BHD (s pravým úhlem při vrcholu D).

Označíme $\alpha = \measuredangle BHD$.

$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

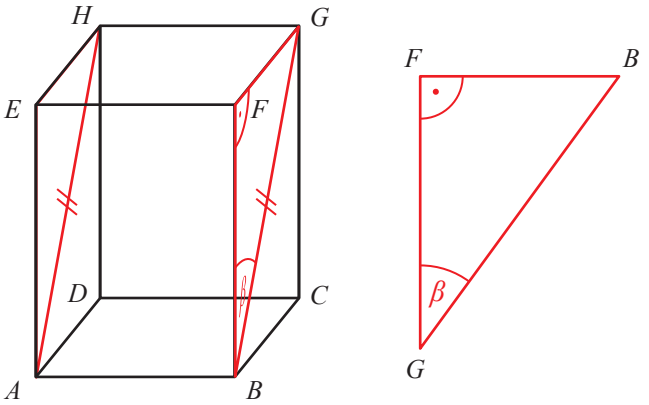
B)



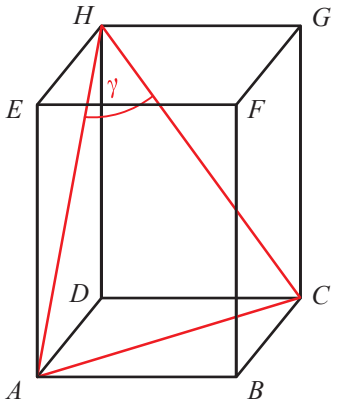
25.2 Odchylka mimoběžek $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow AH$ je rovna velikosti úhlu FBG, protože přímka BF je rovnoběžná s přímkou AH. Označíme $\beta = \measuredangle FBG$ a kosinus vypočteme užitím pravoúhlého trojúhelníku BGF.

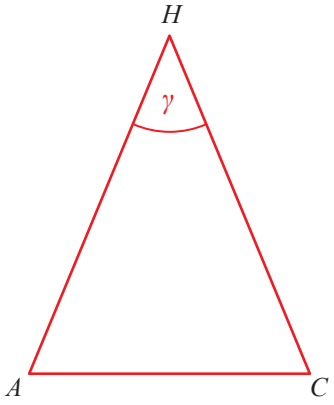
$$\cos\beta = \frac{|BF|}{|BG|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

E)



25.3 Velikost úhlu $\gamma = \measuredangle AHC$ bychom počítali z rovnoramenného trojúhelníku ACH s hlavním vrcholem H.





Protože je požadován kosinus úhlu γ, použijeme kosinovou větu:

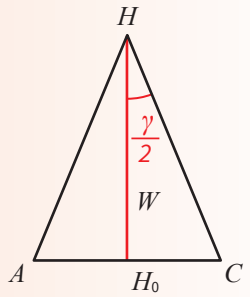
$|AC|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2 \cos\gamma$,

po dosazení $8 = 40 - 40 \cdot \cos\gamma$, tedy $\cos\gamma = \frac{4}{5}$

A)

*V části 3 je třeba si uvědomit, že trojúhelník ACH **není pravoúhlý**, nelze proto použít definici kosinu jako poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku.*

V úloze III. bychom samozřejmě mohli rovnoramenný trojúhelník ACH rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, pomocí nichž lze vypočítat velikost úhlu $\frac{\gamma}{2}$.



Tento výpočet je podstatně náročnější a nevede přímo k požadovanému kosinu, proto ho zde nebudeme uvádět.

26 26.1 $8a - 2a^3 \geq 0$

$8a - 2a^3 = a(8 - 2a^2) = 2a(4 - a^2) = 2a(2 - a)(2 + a)$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 0\rangle$	$\langle 0; 2\rangle$	$(2; \infty)$
$2a$	–	–	+	+
$2 - a$	+	+	+	–
$2 + a$	–	+	+	+
$2a(2 - a)(2 + a)$	+	–	+	–

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$

B)

Výraz rozložíme na součin užitím vzorců, určíme nulové body a posoudíme znaménko výrazu v intervalech mezi nulovými body. Krajní body příslušných intervalů zahrneme do hledané množiny, pokud je v tomto bodě výraz definován.

26.2 $\underbrace{(a^2+1)}_{\text{vždy kladné}} \cdot (a^2+a-2) \geq 0$

$a^2+a-2 \geq 0$

$(a+2)(a-1) \geq 0$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 1\rangle$	$\langle 1; \infty)$
$a+2$	−	+	+
$a-1$	−	−	+
$(a+2)(a-1)$	+	−	+

$a \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

E)

26.3 $-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \geq 0$

$-a^2 - 2a - 2 \geq 0 \qquad /:(-1)$

$a^2 + 2a + 2 \leq 0$

$$\frac{-1}{2a^2-a-1} \geq 0$$

$$\frac{-1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \geq 0$$

$$\frac{1}{(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; 1)$	$(1; \infty)$
$a-1$	−	−	+
$a+\frac{1}{2}$	−	+	+
$(a-2)(a+1)$	+	−	+

$a \in (-\frac{1}{2}; 1)$

F)

Připomeňte si vzorce pro rozklad výrazů na součin:

- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A-B)(A^2-AB+B^2)$

Pozor u B: Výraz $1 + 2a + 4a^2$ není druhá mocnina dvojčlenu $\left((1+2a)^2 = 1 + 4a + 4a^2\right)$.

26.4 $\frac{a^2-4}{-1} \geq 0$

$4 - a^2 \geq 0$

$(2-a)(2+a) \geq 0$

	$(-\infty; -2\rangle$	$\langle -2; 2\rangle$	$\langle 2; \infty)$
$2-a$	+	+	−
$2+a$	−	+	+
$(2-a)(2+a)$	−	+	−

$a \in \langle -2; 2\rangle$

C)

ŘEŠENÍ – TEST 2

1 $y = \frac{3}{5}x$

$x - y = 5,6$

$x - \frac{3}{5}x = 5,6$

$\frac{2}{5}x = 5,6$

$x = 5,6 \cdot \frac{2}{5} = 14$

$y = \frac{3}{5} \cdot 14 = \frac{42}{5} = 8,4$

$\mathbf{y = 8,4}$

Zapíšeme údaje z úlohy. Soustavu rovnic vyřešíme dosazovací metodou.

2 $0,2 \cdot 10^{4x-7} - 200 = 0$

$0,2 \cdot 10^{4x-7} = 200$

$10^{4x-7} = \frac{200}{0,2}$

$10^{4x-7} = 1000$

$10^{4x-7} = 10^3$

$4x - 7 = 3$

$4x = 10$

$\mathbf{x = \frac{5}{2}}$

Zk.:

$L\left(\frac{5}{2}\right) = 0,2 \cdot 10^{4 \cdot \frac{5}{2} - 7} - 200 = 0,2 \cdot 10^3 - 200 = 200 - 200 = 0$

$P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$

Lze použít substituci $t = 4x - 7$ a řešit rovnici $0,2 \cdot 10^t - 200 = 0$. Dostaneme $10^t = 1000$, $t = 3$ a po dosazení zpět do rovnice substituce $3 = 4x - 7$, tedy $x = \frac{5}{2}$.

Zkouška v tomto případě není nutnou součástí řešení, žádnou z užitých úprav jsme nemohli ztratit žádný kořen ani získat žádný navíc. Pokud by nám zkouška „nevyšla“, je nutno v řešení hledat (vlastní) chybu.

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0'$

$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

$-k + 28 = 0$

$\mathbf{k = 28}$

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule. Dále počítáme podle definice.

4 $112 \cdot 0,75 = 84$

$84 \cdot \frac{2}{3} = 56$

Vykvetlo **56** červených tulipánů.

Vypočítáme počet všech vykvetlých tulipánů. Z počtu kvetoucích připadají na červené dvě třetiny.

5 $s_8 = (a_1 + a_8) \cdot \frac{8}{2}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_8 = 11 + 28 = 39$

$s_8 = (11 + 39) \cdot 4 = 200$

V hledišti divadla je **200 sedadel**.

Počty sedadel v řadách tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$, její první člen je roven $a_1 = 11$. Počet členů posloupnosti je 8. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti - $a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Neznáme osmý člen a_8, vypočteme ho podle vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n + 1)$ a dosadíme do vzorce pro součet.

6 $m = xy + 2(x + y)k$

$m = xy + 2xk + 2yk$

$m - 2yk = xy + 2xk$

$m - 2yk = x(y + 2k)$

$\frac{m - 2yk}{y + 2k} = x$

Z daného vzorce chceme vyjádřit veličinu x. Nejprve je nutné roznásobit závorku. Členy, které obsahují požadovanou veličinu, ponecháme na jedné straně rovnice, ostatní „převedeme“ na druhou stranu rovnice. (Odečteme od obou stran rovnice výraz $2yk$.)
Vytkneme požadovanou veličinu. Obě strany rovnice vydělíme výrazem v závorce. (Protože se jedná o kladné veličiny, výraz nikdy nebude roven 0, můžeme dělit bez jakýchkoli omezení).

7 $x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}; D \in R / \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

$\frac{2x - 1}{3x - 1} = \frac{2x}{3x + 1}$

$(2x - 1)(3x + 1) = 2x(3x - 1)$

$6x^2 - 3x + 2x = 6x^2 - 2x$

$x = 1$

$1 \in D$

$K = \{1\}$

Obě strany rovnice násobíme nejmenším společným násobkem obou jmenovatelů (úprava je ekvivalentní v definičním oboru rovnice). Pokud bychom na začátku podmínky nenapsali a rovnici řešili v R, není jisté, že nenásobíme nulou a na konci bychom museli udělat zkoušku. Vypočítáme $x = 1$.
Kořen vyhovuje stanoveným podmínkám, proto může být řešením rovnice. Bez podmínek na začátku by bylo nutné provést zkoušku:

$L(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

$P(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$L(1) = P(1) \Rightarrow 1 \in K$

8 $p' = 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 0{,}6375$ (procent)

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}6375}{100}\right)^5 = 25807$$

Banka by vyplatila **25807 Kč**.

Vypočítáme reálnou („čistou“) úrokovou míru p', tedy úrok po odečtení 15% daně.
Částka na účtu vzrůstá pravidelně každý rok o stálý počet procent p' – použijeme vzorec pro pravidelný růst veličiny V:

$$V_5 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^5$$

9 x ... počet dívek ve třídě 4C

$2x$ ... počet chlapců ve třídě 4C

$x + 2x$ ... počet všech žáků třídy 4C

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{3x}{2}} = 0{,}1$$

$$\frac{x(x-1)}{3x(3x-1)} = 0{,}1$$

$$\frac{x-1}{3(3x-1)} = 0{,}1$$

$x - 1 = 0{,}3(3x - 1)$

$10x - 10 = 9x - 3$

$\mathbf{x = 7}$

Zkontrolujeme správnost úvah a výpočtu podle textu úlohy:

Ve třídě je 7 dívek a 14 chlapců, vypočítáme pravděpodobnost, že v náhodně vybrané dvojici budou jen dívky:

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{21}{210} = 0{,}1 \text{ (vyhovuje zadání).}$$

Ve třídě je **7 dívek**.

Označíme počet dívek ve třídě proměnnou x, pomocí ní vyjádříme i další údaje.

Vyjádříme pravděpodobnost, že náhodně vybraná dvojice osob je složená jen z dívek. Jmenovatel zlomku vyjadřuje počet všech způsobů, jak vybrat dvojici osob ze třídy, ve které je x dívek a $2x$ chlapců, celkem $3x$ žáků (tvoříme neuspořádané dvojice z $3x$ žáků, tedy dvojčlenné kombinace z $3x$ prvků), těch je $\binom{3x}{2}$.

V čitateli je počet možností, jak dvojici vytvořit jen z dívek $\binom{x}{2}$.

Vypočítáme kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vyřešíme rovnici.

10 $\sin \alpha = \frac{u}{a} = \frac{7}{11}$

$\boldsymbol{\alpha = 39° \, 31'}$

$o = 2(a + b)$ $(b = |BC| = |AD|)$

$a^2 = u^2 + b^2$

$b^2 = a^2 - u^2 = (121 - 49)\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2$

$b = \sqrt{72}\text{ cm} = 6\sqrt{2}\text{ cm}$

$o = 2(11 + 6\sqrt{2})\text{ cm} \doteq \mathbf{39{,}0\text{ cm}}$

Úhel α má velikost 39° 31´, obvod kosodélníku je 39,0 cm.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme sinus úhlu α. K určení α použijeme kalkulačku (tlačítko většinou označeno $\sin^{-1}$ nebo arcsin podle typu kalkulátoru). K výpočtu obvodu je nutné vypočítat délku strany AD, můžeme využít Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

Pozor na správné zaokrouhlení výsledku 38,97na jedno desetinné místo.

11 $x \neq 2; D \in R / \{2\}$

$$\frac{x}{x-2} \leq 1$$

$$\frac{x}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{2}{x-2} \leq 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

$$\boldsymbol{K = (-\infty; 2)}$$

Nerovnice má neznámou ve jmenovateli, je nutné zapsat definiční obor nerovnice. Nerovnici převedeme na podílový tvar s nulou na pravé straně nerovnice – od obou stran nerovnice odečteme jedničku, pak výrazy na levé straně nerovnice převedeme na společný jmenovatel. Čitatel získaného zlomku je kladný - aby zlomek mohl být menší nebo roven nule, musí jmenovatel zlomku být záporný.

Pozor *– ve snaze zbavit se zlomku není možné v R násobit nerovnici jmenovatelem – nevíme, zda výraz $x - 2$ není záporný.*

12 $$\left(3a - \frac{6a-1}{3a}\right) \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{9a^2 - (6a-1)}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$

$$= \frac{9a^2 - 6a + 1}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} = \frac{(3a-1)^2}{3a} \cdot \frac{1}{3a-1} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3a-1}{3a}}$$

Podmínky: $a \neq 0; a \neq \frac{1}{3}$

Závorka určuje prioritu operací – výrazy v závorce převedeme na společný jmenovatel. V čitateli prvního zlomku odstraníme závorku a podle vzorce $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu. Závorkou $(3a - 1)$ zkrátíme a zapíšeme výsledek.
Pozor *– dále krátit nelze, v čitateli je rozdíl, nikoli součin. Jmenovatel žádného zlomku nesmí být roven nule, tedy $3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ a $3a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{3}$*

13 $|3x - 2| = x + 6$

$3x - 2 \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{3} \iff x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$, $3x - 2 < 0 \iff x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

1. pro x z intervalu $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$$|3x - 2| = -(3x - 2) = -3x + 2$$
$$-3x + 2 = x + 6$$
$$-4x = 4$$
$$x = -1$$

$$-1 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right), K_1 = \{-1\}$$

2. V $\left\langle \frac{2}{3}; \infty \right)$:

$$|3x - 2| = 3x - 2$$
$$3x - 2 = x + 6$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

$$4 \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right), K_2 = \{4\}$$

$$\boldsymbol{K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 4\}}$$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu v rovnici, použijeme definici absolutní hodnoty reálného čísla ($a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$). Řešení rovnice rozdělíme do dvou intervalů podle znaménka argumentu („vnitřku“) absolutní hodnoty. Řešíme dvě lineární rovnice již bez absolutní hodnoty. Je nutné se přesvědčit, zda vypočtený kořen patří do intervalu, v němž právě řešíme. Množinu kořenů v R dostaneme jako sjednocení množin kořenů v jednotlivých intervalech. Pozn.: Abychom získali dva intervaly, na nichž všechny kroky provádíme, hledáme vlastně nulové body výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

14 x ... počet hodin, který potřebuje pan Novák na posekání celé zahrady

y ... počet hodin, který potřebuje paní Nováková k posekání celé zahrady

Za jednu hodinu poseká pan Novák $\frac{1}{x}$ a paní Nováková $\frac{1}{y}$ zahrady.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$3 \cdot \frac{1}{x} = 4 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{(4 \cdot \frac{1}{y})}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{3y}$$

$$\frac{4}{3y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{3y} = \frac{1}{12}$$

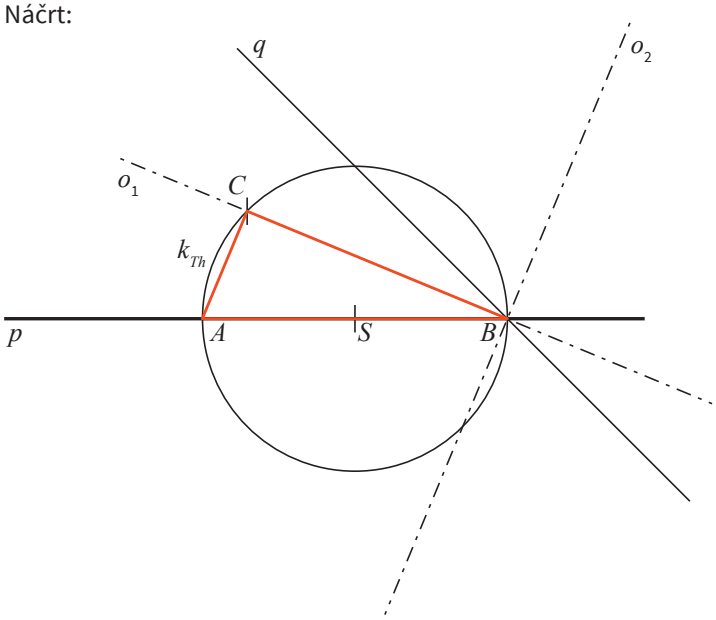
$y = 28$ (hodin)

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{3 \cdot 28} = \frac{1}{21}$$

$x = 21$ (hodin)

Označíme neznámé veličiny v úloze.
Sestavíme rovnice z údajů v úloze:
Budou-li pan a paní Novákovi pracovat společně jednu hodinu, posekají dohromady $\frac{1}{12}$ zahrady.
Druhá rovnice vyjadřuje rovnost posekané plochy paní Novákovou za 4 a panem Novákem za 3 hodiny.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou, z druhé rovnice stačí vyjádřit výraz $\frac{1}{x}$ a dosadit do první.
Vypočítáme y, pak $\frac{1}{x}$ a odtud x.
Zkontrolujeme, zda vypočtené hodnoty odpovídají textu úlohy – paní Nováková poseká zahradu za 28 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{28}$ zahrady a za 4 hodiny $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ zahrady.
Pan Novák poseká zahradu za 21 hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{21}$ zahrady a za 3 hodiny $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ zahrady.
Budou-li pracovat společně, posekají za 1 hodinu $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{4+3}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{12}$ zahrady.
Nezapomeňte na slovní odpověď.

15 Náčrt:



Bod C má mít stejnou vzdálenost od dvou přímek p a q. Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek, jsou dvě přímky, na nichž leží osy úhlů sevřených těmito různoběžkami (obě přímky procházejí průsečíkem daných různoběžek a jsou na sebe kolmé).

Trojúhelník ABC má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C – proto musí bod C ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB.

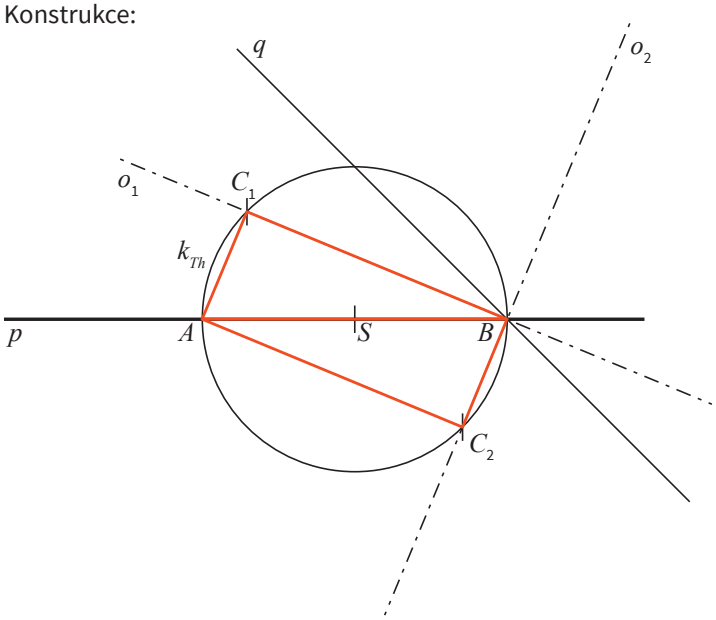
Rozbor:

$|Cp| = |Cq| \Rightarrow C \in o_1 \cup o_2$

$|\measuredangle ABC| = 90° \Rightarrow C \in k_{Th}(AB)$

$C \in k_{Th}(AB) \cap (o_1 \cup o_2)$

Konstrukce:



Pozor – střed úsečky určíme konstrukčně pomocí dvou kružnic se stejnými poloměry a středy v bodech A a B.

Popis konstrukce:

1. S; S je střed AB
2. k_{Th}; $k_{Th}\left(S; r = \frac{r}{2}\right)$
3. o_1, o_2; o_1, o_2 jsou osy úhlů sevřených přímkami p a q
4. C_1; $C_1 \in o_1 \cap k_{Th}$
5. C_2; $C_2 \in o_2 \cap k_{Th}$
6. $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$

Úloha má dvě řešení.

16 $2x - a = 0$

$x = \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = -2$

$a = -4$ D)

Zapíšeme podmínky pro existenci výrazu v předpisu funkce f:

$2x - a \neq 0$, tedy $x \neq \frac{a}{2}$.

Z uvedeného definičního oboru plyne $x \neq -2$. Porovnáme obě podmínky, tedy

$\frac{a}{2} = -2$ a zároveň $a = -4$.

17 $q: y = \frac{2}{3}x + b$

$M \in q \Rightarrow -1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$

$q: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$q: \frac{2}{3}x - y - \frac{7}{3} = 0$

q: $2x - 3y - 7 = 0$

Odpověď B

Přímka p je dána směrnicovou rovnicí, směrnice přímky p je rovna $\frac{2}{3}$.

Rovnoběžné přímky mají stejné směrnice, proto i směrnice hledané přímky q bude rovna $\frac{2}{3}$. Přímka q bude tedy mít rovnici

$q: y = \frac{2}{3}x + b$.

Koeficient b určíme využitím souřadnic bodu M, který má na přímce q ležet, jeho souřadnice musí tedy vyhovovat rovnici přímky q.
Získali jsme směrnicovou rovnici přímky q, převedením rovnice na anulovaný tvar dostaneme obecnou rovnici přímky q.
Vynásobením obou stran rovnice třemi získáme všechny koeficienty celočíselné.

18 $a = 45$ cm, $b = 25$ cm, $v = 25$ cm, $V_1 = 18$ l $= 18$ dm$^3 = 18000$ cm^3

$V_1 = a \cdot b \cdot v_1$

$18000 \text{ cm}^3 = 45 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \cdot v_1$

$v_1 = \frac{18000}{45 \cdot 25} \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

$v - v_1 = 25 \text{ cm} - 16 \text{ cm} =$ **9 cm**

Odpověď B

Voda po nalití do akvária bude mít tvar kvádru s rozměry a, b, v_1. Dosazením do vzorce pro objem kvádru zjistíme neznámý třetí rozměr kvádru v_1.
Před dosazením vyjádříme objem v cm^3 podle vztahu 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.
Vypočítáme vzdálenost vodní hladiny od horního okraje akvária.

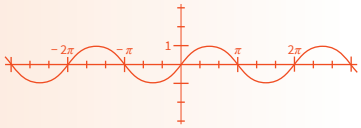
19 **$A = 2$**

$B = 3$

$C = -1$

Odpověď E

Graf funkce f: $y = A \cdot \sin(Bx) + D$ sestrojíme modifikací grafu funkce $y = \sin x$.



Konstanty A a B ovlivňují „tvar“ křivky.
A určuje amplitudu – „roztažení“ ve svislém směru, pro funkci f $A = 2$ (amplituda funkce $y = \sin x$ je 1).
B určuje periodu – roztažení ve vodorovném směru, perioda funkce f je $\frac{2}{3}\pi$, proto $B = 3$ (podle vztahu $p = \frac{2\pi}{B}$, perioda funkce $y = \sin x$ je 2π).
Konstanta D určuje „posun“ grafu ve směru osy y, pro funkci f je posun o 1 ve směru záporné osy y („dolů“), proto $D = -1$.

20 $y = \binom{10}{6} \cdot 6! = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$

Odpověď C

Nejprve vybereme („označíme“) sedadla, která turisté obsadí – vybíráme 6 sedadel z 10 nezávisle na pořadí výběru, tedy tvoříme šestičlenné kombinace z 10 prvků, jejich počet vyjadřuje kombinační číslo $\binom{10}{6}$.

Potom začneme sedadla „obsazovat“ turisty – každému sedadlu „přidělíme“ jednoho turistu (představte si vybraná sedadla v řadě a jen měníme pořadí osob) - tvoříme permutace z 6 prvků, těch je (pro každý výběr sedadel) 6!. Násobíme podle kombinatorického pravidla součinu.
Jiný způsob uvažování (pro pokročilejší):
Tvoříme permutace s opakováním z 10 prvků, z nichž 4 jsou stejné (celkem 10 sedadel, 6 z nich obsadíme „rozlišitelnými“ turisty a 4 zůstanou prázdná – nerozlišitelná).
Jejich počet je pak $\frac{10!}{4!}$.

21 $a_1 = k \cdot a = k \cdot 12,5\ \text{cm}$

$b_1 = k \cdot b = k \cdot 10\ \text{cm}$

$c_1 = k \cdot c = k \cdot 8,5\ \text{cm}$

$a_1 - c_1 = 4,8\ \text{cm}$

$k \cdot 12,5\ \text{cm} - k \cdot 8,5\ \text{cm} = 4,8\ \text{cm}$

$4k\ \text{cm} = 4,8\ \text{cm}$

$k = \frac{4,8}{4} = \frac{6}{5}$

$b_1 = \frac{6}{5} \cdot 10\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$

Odpověď D

Pro podobné trojúhelníky platí, že odpovídající si strany jsou ve stejném poměru.

Využijeme údaj o rozdílu nejdelší a nejkratší strany, sestavíme a vyřešíme rovnici pro koeficient podobnosti k.

Dopočítáme délku prostřední strany b.

22 $2s_1 - s_2 + 12 = 0$

$s_1 = -3 + 2t$

$s_2 = 1 - t$

$2(-3 + 2t) - (1 - t) + 12 = 0$

$t = -1$

$s_1 = -3+2t \cdot (-1) = -5$

$s_2 = 1-(-1) = 2$

$S\,[-5; 2]$

$r_k = |ST| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

Odpověď A

Poloměr kružnice můžeme určit jako vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu. Bod T na kružnici k známe, proto stačí najít střed kružnice k, který je průsečíkem přímek p a q.

Průsečík přímek je bod, jehož souřadnice musejí vyhovovat rovnicím obou přímek, tedy obecné rovnici přímky p i parametrickému vyjádření přímky q. Označíme jeho souřadnice $S[s_1; s_2]$ a dosadíme je do daných rovnic. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešit budeme dosazovací metodou (využijeme vyjádřené s_1 a s_2 v druhé a třetí rovnici a dosadíme do první).

Délku úsečky ST počítáme podle vzorce:
$|ST| = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2}$

23 $\frac{s_4}{s_6} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

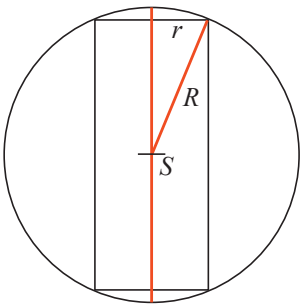
Odpověď C

Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit třemi úhlopříčkami (AD, BE, CF) na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Úsečky BD a DF vždy dva z těchto trojúhelníků půlí, proto obsah trojúhelníku BCD i obsah trojúhelníku DEF je roven obsahu každého ze zmiňovaných rovnostranných trojúhelníků. Obsah čtyřúhelníku ABDF je tedy rovný $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ obsahu šestiúhelníku.

Jiné řešení: Čtyřúhelník ABDF lze rozdělit na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABF, BSF, BDS, FDS. Do celého šestiúhelníku zbývají ještě dva shodné trojúhelníky (BCD a DEF), proto je poměr obsahů

$\frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

24



Načrtneme osový řez koule a vepsaného válce, označíme v výšku válce.

24 24.1

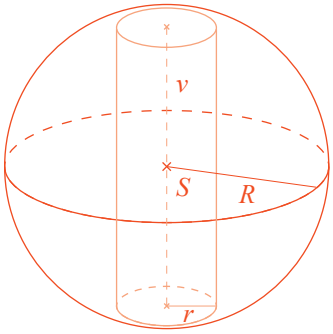
$R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$26^2 = 10^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$

$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$

$\frac{v}{2} = 24$

v = 48 cm (Tvrzení I. je pravdivé)



Použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou R a odvěsnami r a $\frac{v}{2}$.

Podstavou válce je kruh, dosazením do vzorce $S_{po} = \pi r^2$ vypočítáme její obsah. Plášť válce je vlastně obdélník, jehož šířka je rovna obvodu podstavy ($o = 2\pi r$) a výška je rovna výšce válce.

24.2

$S_{po} = \pi r^2 = \pi \cdot 100\ \text{cm}^2$

$S_{pl} = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 10 \cdot 48 = 960\pi\ \text{cm}$

$\frac{S_{pl}}{S_{po}} = \frac{960\pi}{100\pi} =$ **9, 6 (Tvrzení II. je pravdivé)**

Pro porovnání objemu válce a koule vypočteme jejich objemy podle vzorců

$V_V = \pi r^2 \cdot v$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

Porovnáním podílů zjistíme, že válec zaujímá přibližně 20% objemu koule.

Povrch koule počítáme podle vzorce $S_K = 4\pi R^2$

24.3

$V_V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 10^2 \cdot 48 = 4800\pi\ \text{cm}^3$

$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 26^3 = \frac{70304}{3}\pi\ \text{cm}^3$

$\frac{V_V}{V_K} = \frac{4800\pi}{\frac{70304}{3}\pi} \doteq$ **0, 20 (Tvrzení III. není pravdivé)**

24.4

$S_K = 4\pi R^2 = 4\pi\ 26^2 = 2704\pi\ \text{cm}^2$

$\frac{S_K}{S_{pl}} = \frac{2704\pi}{960\pi} \doteq$ **2, 8 > 2 (Tvrzení IV. je pravdivé)**

25 25.1

$P = \frac{2}{5}$

Odpověď B

25.2

$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

Odpověď C

Pravděpodobnost náhodného jevu A počítáme jako poměr $P = \frac{m}{n}$, kde P je počet výsledků pokusu, při kterých jev A nastane, a n je počet všech možných výsledků pokusu.

I.

Táhneme-li z osudí, ve kterém je 5 koulí, jednu kouli, má tento pokus 5 možných výsledků, jevu A (tažení bílé koule) jsou příznivé 2.

Pravděpodobnost, že první vytažená koule je černá, je $\frac{3}{5}$. Protože vytažené koule se do osudí vracejí, pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je opět černá, je také $\frac{3}{5}$. Pravděpodobnost průniku nezávislých jevů počítáme jako součin pravděpodobností.

25.3

$P = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{13}{25}}$

Odpověď D

První dvě vytažené koule budou mít stejnou barvu. Tento případ může nastat dvěma způsoby – obě první koule budou černé, nebo obě první koule budou bílé. Jevy „první dvě vytažené koule budou černé“ a „první dvě vytažené koule budou bílé“ jsou neslučitelné, pravděpodobnost jejich sjednocení dostaneme jako součet jejich pravděpodobností

($\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ je pravděpodobnost toho,

že první dvě vytažené koule budou bílé).

26 26.1
Odpověď B

$f_1: y = \frac{1}{3^x}$

je exponenciální funkce – grafem je exponenciála, základ je roven

$\frac{1}{3} < 1$, proto f_1 klesá ve svém

definičním oboru, vyhovuje jedině B.

26.2
Odpověď A

$f_2: y = \frac{3}{x}$

je nepřímá úměrnost, grafem je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy, vyhovuje jedině A.

26.3
Odpověď C

$f_3: y = \frac{x}{3}$

grafem je přímka s kladnou

směrnicí $\frac{1}{3}$, vyhovuje jedině C.

26.4
Odpověď D

$f_4: y = \frac{1}{x-3}$

je lineární lomená funkce, grafem je hyperbola se středem v bodě [3; 0], vyhovuje jedině D.

ŘEŠENÍ – TEST 3

1 Pro snadnější porovnání čísel a určení, zda do intervalu patří nebo ne, zapíšeme všechna čísla ve stejném tvaru, např. jako čísla desetinná. Poté je zakreslíme na číselnou osu.

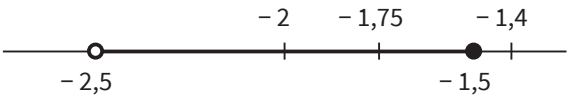
$-\frac{5}{2} = -2,5$

$-\frac{3}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{4} = -1,75$

$-1\frac{1}{2} = -1,5$

$-\frac{7}{5} = -1,4$



Pro porovnání zadaných čísel bychom také mohli všechna čísla vyjádřit ve zlomcích se společným jmenovatelem.

Do zadaného intervalu tedy nepatří čísla −2, 5 a −1, 4. Určíme jejich součet:
$-2,5 + (-1,4) = \mathbf{-3,9}$

2 Nejprve určíme podmínky. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, proto $x + 4 \neq 0$ a $x - 4 \neq 0$, první podmínka je pro přirozená čísla splněna vždy, druhá pro $x \neq 4$.

$$\frac{4}{x+4} - \frac{20-x^2}{x^2-16} = \frac{1}{x-4} \qquad | \cdot (x+4)(x-4)$$

$$4 \cdot (x-4) - (20 - x^2) = x + 4$$

$$4x - 16 - 20 + x^2 = x + 4 \qquad | -(x+4)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8) \cdot (x-5) = 0$$

$$\cancel{x = -8} \qquad \text{Kořen nepatří do množiny přirozených čísel } N.$$

$$\mathbf{x = 5}$$

případně K = {5}

Protože řešíme rovnici v množině přirozených čísel, podmínku $x \neq 4$ nemusíme uvádět. Kvadratickou rovnici můžeme řešit nejen rozkladem na součinový tvar, ale také pomocí diskriminantu a vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

3 $3^{21} - 11 \cdot 3^{20} + 3^{22} = 3 \cdot 3^{20} - 11 \cdot 3^{20} + 3^2 \cdot 3^{20} = 3^{20} \cdot (3 - 11 + 9) = \mathbf{3^{20}}$

Výraz je opravdu nutné upravit na základě pravidel pro počítání s mocninami. Výpočet pomocí kalkulačky nestačí, protože se v tomto případě hodnotí celý.

4 Aby byla definována odmocnina a logaritmická funkce, musí být splněny podmínky:

$2x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - 4x > 0$

$2x \geq -5 \qquad -4x > -2$

$x \geq -\frac{5}{2} \qquad x < \frac{1}{2}$

$K_1 = \left\langle -\frac{5}{2}; \infty \right) \qquad K_2 = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$

Odmocnina se sudým exponentem je definována jen pro nezáporná reálná čísla. Logaritmická funkce je definována jen pro kladná reálná čísla. U druhé nerovnosti pozor na násobení záporným číslem.

Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení obou nerovnic (K_1 a K_2).
Definiční obor funkce tedy je:

$$\mathbf{D = \left\langle -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right)}$$

5 Při úpravě lomených výrazů je nutné rozložit čitatele i jmenovatele zlomků na součin. To se provádí vytýkáním nebo využitím vzorců. Poté můžeme krátit. Podmínky určujeme z rozložených jmenovatelů.

$$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{y}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2xy+x^2+y^2}{y}:\frac{y+x}{xy}=\frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}\cdot\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y+x}}=\mathbf{x(x+y)}\qquad \mathbf{[x\neq 0, y\neq 0]}$$

6 6.1

Všechny členy zapíšeme pomocí mocnin se základem 3 a upravíme pomocí pravidel pro počítání s mocninami:

$$9^{x-2}=\frac{1}{27}\cdot 3^x$$

$$3^{2(x-2)}=3^{-3}\cdot 3^x$$
$$3^{2x-4}=3^{x-3}$$
$$2x-4=x-3$$
$$\mathbf{x=1}$$

případně $K=\{1\}$

6.2

Nejprve určíme podmínky: $x>0$

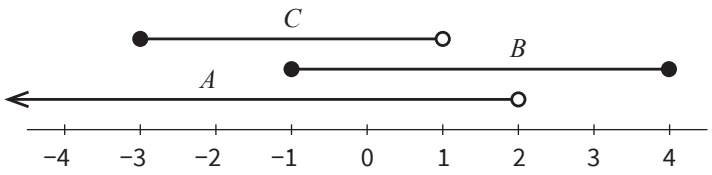
Členy upravíme pomocí vět o logaritmech a definice logaritmu:

$$\log_2 x+\log_2 4=4$$
$$\log_2 4x=4$$
$$4x=16$$
$$\mathbf{x=4}$$

případně $K=\{4\}$

Pokud při řešení logaritmické rovnice neurčíme podmínky, musíme alespoň zkusit dosadit vypočtený kořen do zadané rovnice a zjistit, zda jsou pro něj logaritmy definovány. U exponenciální rovnice podmínky a zkoušku dělat nemusíme, protože jde o prostou funkci, která je definována pro všechna čísla z R.

7 Intervaly A, B, C zakreslíme na číselnou osu. Okraj intervalu C zvolíme tak, aby se intervaly A, B, C překrývaly na intervalu $\langle -1; 1)$.



$\mathbf{c=1}$

8 Výšky klád tvoří členy aritmetické posloupnosti.

$a_1=15$ cm; $a_{17}-a_9=32$ cm

Ze vztahu mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti určíme diferenci:

$$a_{17}=a_9+(17-9)\cdot d$$
$$d=\frac{a_{17}-a_9}{8}$$

po dosazení:
$d=4$ cm

Pro výpočet třináctého členu posloupnosti využijeme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$$a_{13}=a_1+(13-1)\cdot d$$

po dosazení:
$a_{13}=15\text{cm}+12\cdot 4\text{ cm}=$ **63 cm**

V aritmetické posloupnosti je rozdíl dvou po sobě následujících členů vždy stejný.

9 Nejprve určíme dvacátý člen posloupnosti ze vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti:

$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d$

po dosazení:

$a_{20} = 15\text{ cm} + 19 \cdot 4\text{ cm} = 91\text{ cm}$

Pro součet n členů aritmetické posloupnosti platí:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

po dosazení:

$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (15\text{ cm} + 91\text{ cm})$

$\mathbf{s_{15} = 1060\text{ cm}}$

10 Některé výrazy s faktoriály částečně rozepíšeme na součin, vytkneme a pokrátíme:

$$\frac{500! + 499!}{499!} - \frac{501! - 500!}{500!} = \frac{500 \cdot 499! + 499!}{499!} - \frac{501 \cdot 500! + 500!}{500!} =$$

$$= \frac{499!\,(500 + 1)}{499!} - \frac{500!\,(501 - 1)}{500!} = 501 - 500 = \mathbf{1}$$

Při úpravě výrazů s faktoriály rozepisujeme faktoriál většího z čísel na součin. Vypíšeme tolik činitelů, abychom se dostali na úroveň menšího z čísel.

11 11.1
Funkční hodnotu v bodě -2 určíme dosazením čísla -2 do předpisu funkce:

$a_2 = f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

11.2
Průsečíky s osou x mají y-ovou souřadnici nulovou. Do předpisu funkce tedy dosadíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnici:

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$D < 0$ Rovnice nemá reálné kořeny. **Průsečíky grafu funkce f s osou x neexistují.**

12 Celý objem nádoby je $V = \frac{3}{2} \cdot 1\text{ l} = 1,5\text{ l} = 1500\text{ cm}^3$.

Pro objem válce platí vztah:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

Výška válce je stejná jako průměr jeho podstavy, tedy $v = 2r$:

$V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$

Vyjádříme poloměr r a dosadíme:

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \doteq \mathbf{6,2\text{ cm}}$

13 Šest hledaných čísel se pokusíme zapsat do šesti polí tabulky tak, aby byla řada čísel uspořádána vzestupně. Protože má mít medián hodnotu 5,5, musí být ve středních polích tabulky čísla, jejichž průměr je 5,5. Ve třetím a čtvrtém poli by tedy mohla být např. čísla 5 a 6:

		5	6		

Protože má mít modus hodnotu 8, musí být toto číslo zastoupeno alespoň dvakrát. Do posledních dvou polí zapíšeme číslo 8:

		5	6	8	8

Protože má mít aritmetický průměr hodnotu 5, musí být součet všech šesti čísel 6 · 5 = 30. Součet už doplněných čísel je 27, na zbylá dvě pole zbývá součet 3. Doplníme tedy čísla 1 a 2:

1	2	5	6	8	8

Soubor hledaných čísel je tedy např: 1, 2, 5, 6, 8, 8.

Úloha má další dvě řešení:

	2	4	7	8	8
	2	3	8	8	8

14 Vrchol vysílače, pata vysílače a okno tvoří trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti $\gamma = 53°$, sevřeným stranami délky $a = 102$ m a $b = 137$ m. Trojúhelník je podle věty *sus* zadán jednoznačně.

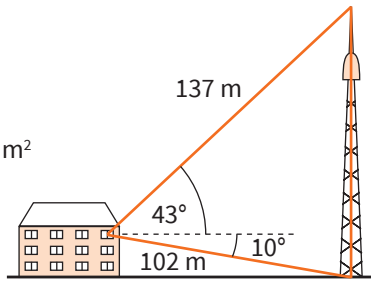
Výšku vysílače v určíme pomocí kosinové věty:

$v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

po dosazení:

$v^2 = (1372 + 1022 - 2 \cdot 137 \cdot 102 \cdot \cos 53°)\ \text{m}^2$

v = **111 m**



Kosinovou větu používáme pro řešení trojúhelníků zadaných podle vět sss a sus. Naopak sinovou větu používáme tehdy, je-li trojúhelník zadán podle věty usu nebo Ssu.

Další řešení: Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a k výpočtu použijeme goniometrické funkce ostrého úhlu.

15 15.1

Pravděpodobnost jevu A počítáme jako podíl počtu výsledků m příznivých danému jevu a celkového počtu možných výsledků n.

$m = 6$ (počet dvoukorunových mincí)

$n = 16$ (počet všech mincí)

$P_{(A)} = \frac{6}{16} = 0,375 \sim$ **37,5%**

15.2

$m = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$ (počet pětic mincí, ve kterých jsou 3 dvoukorunové 2 pětikorunové mince)

$n = \binom{16}{5} = 4368$ (počet všech pětic mincí)

$P = \frac{60}{4368} \doteq 0,014 \sim$ **1,4%**

Při úvahách o počtu skupin mincí, které můžeme sestavit, je lepší předpokládat, že jsou i mince stejné hodnoty vzájemně rozlišitelné. Představme si například, že je na nich uveden různý rok vyražení, což samozřejmě nemá vliv na výsledek úlohy.

16 16.1

Vrchol C získáme posunutím vrcholu B o vektor $\vec{d}$. Pro jeho souřadnice tedy platí:

$C = B + \vec{d} = [8; 4] + (1; 3) = \mathbf{[9; 7]}$

A N

16.2

Nejprve určíme souřadnice vrcholu D, který je posunutím vrcholu A o vektor $\vec{d}$:

$D = A + \vec{d} = [1; 3] + (1; 3) = [2; 6]$

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{BD}$ určíme ze vztahu:

$\overrightarrow{BD} = (d_1 - b_1; d_2 - b_2) = \mathbf{(-6; 2)}$

A N

16.3

Souřadnice středu rovnoběžníku určíme jako aritmetický průměr souřadnic bodů A, C:

$S\left[\frac{1+9}{2}; \frac{3+7}{2}\right] = \mathbf{[5; 5]}$

A N

16.4

Nejprve určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$:

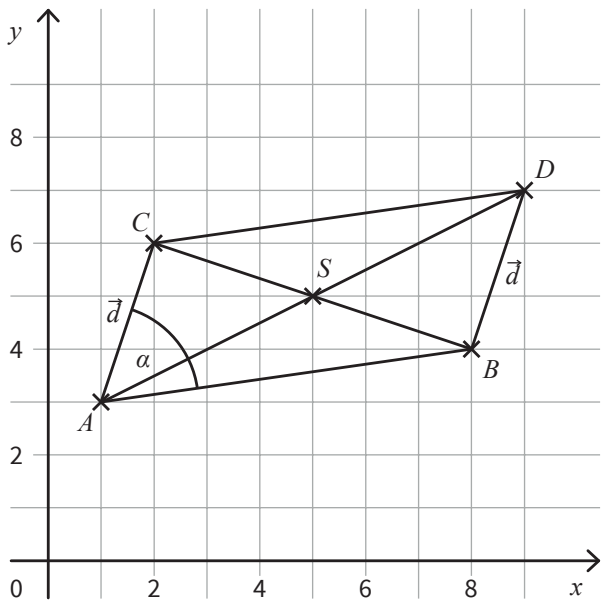
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (7; 1)$

Kosinus hledaného úhlu určíme ze vztahu:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha \doteq \mathbf{63°26'}$

A N



17 Nejprve si vhodně označíme neznámé počty diod. Abychom nemuseli počítat se třemi neznámými, pokusíme se označit počty diod pomocí jediné proměnné x.

červených diod x
zelených diod ..... $1{,}5x$
modrých diod ..... $1{,}5x + 2$
sestavíme rovnici:

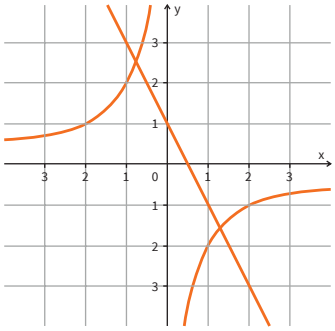
$$x + 1{,}5x + 1{,}5x + 2 = 50$$
$$4x = 48$$
$$x = 12$$

Na stromku je tedy 12 červených, 18 zelených a 20 modrých diod.

A) ~~Červených diod je 14.~~
B) ~~Zelených a modrých diod je dohromady 36.~~
C) ~~Modrých diod je 18.~~
D) Zelených diod je o 6 více než červených.
E) ~~Červených diod je 10.~~

Počty diod by samozřejmě bylo možné označit třemi neznámými, ale museli bychom pak sestavit soustavu tří rovnic, jejíž řešení je pracnější.

18 Grafem funkce $f: y = -2x + 1$ je strmě klesající přímka protínající osu y v bodě [0; 1]. Tomu odpovídají obrázky D a E. Grafem funkce $f: y = \frac{-2}{x}$ je hyperbola, která má své větve ve II. a IV. kvadrantu. Tomu odpovídají obrázky A, C, a E. **Oba grafy jsou tedy správně sestrojeny na obrázku E.**



19 Délky hran kvádru a, b, c označme pomocí jediné neznámé a, $b = 2a$, $c = 3a$, čímž si zajistíme požadovaný poměr délek hran.
Pro povrch kvádru platí:

$$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$$

Dosadíme naše délky hran:

$$S = 2 \cdot (2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$$

Vyjádříme neznámou a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{22}} = \sqrt{\frac{2\,662\ \text{cm}^2}{22}} = 11\ \text{cm}$$

Nejdelší hranou je hrana $b = 3a = 33$ cm.

A) 27 cm
B) 29 cm
C) 30 cm
D) 32 cm
E) jiná délka

20 Z rovnosti vyjádříme rámeček a upravíme:

$\boxed{} = 3\,(a+2)^2 - 2\,(a+3)^2 = 3 \cdot (a^2 + 4a + 4) - 2 \cdot (a^2 + 6a + 9) =$
$= 3a^2 + 12a + 12 - 2a^2 - 12a - 18 = \mathbf{a^2 - 6}$

A) $\boxed{a^2 + 6}$

B) $\boxed{\mathbf{a^2 - 6}}$

C) $\boxed{a + 6}$

D) $\boxed{a - 6}$

E) jiný rámeček

21 Porovnáním zadaného grafu s grafem funkce $y = \cos x$ je zřejmé, že se jedná také o funkci kosinus. Graf má ale dvojnásobnou „výšku“ a je posunut o jedna v kladném směru osy y.

Jeho předpis tedy je:

$\mathbf{y = 2 \cdot \cos x + 1}$

A) $y = 2 \cdot \sin x + 1$
B) $y = \sin x + 2$
C) $y = \sin 2x + 1$
D) $y = \cos 2x + 1$
E) $\mathbf{y = 2 \cdot \cos x + 1}$

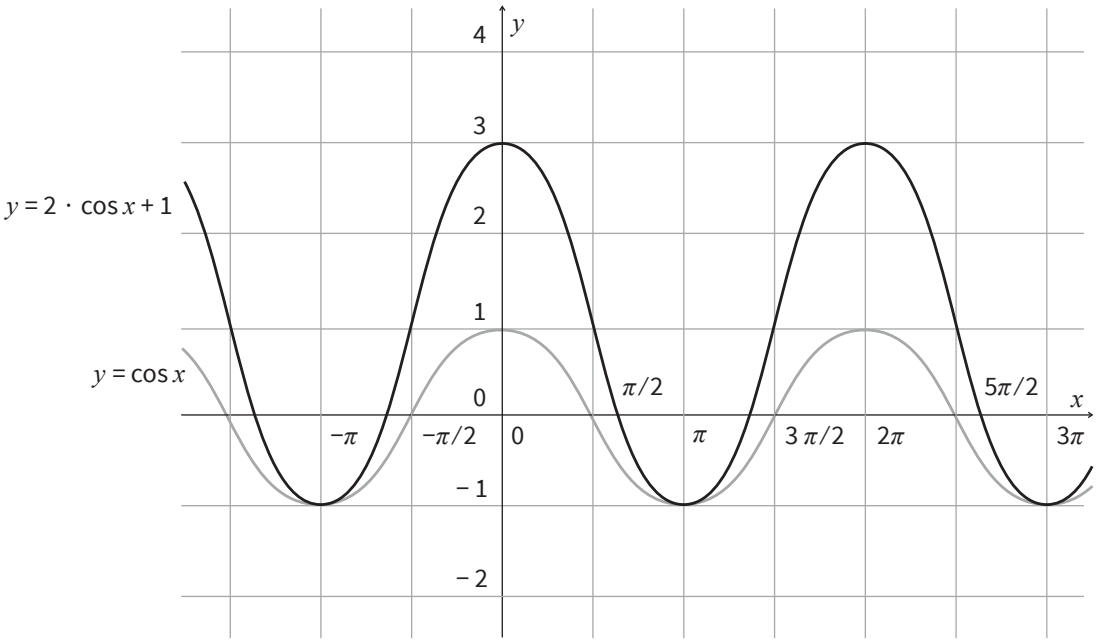
Obecně se dá říci, že graf goniometrické funkce o předpisu $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ ovlivňují jednotlivé koeficienty:

a ... ovlivňuje „výšku“ grafu

b ... ovlivňuje periodu funkce $\left(\text{ta je } \frac{2\pi}{|b|}\right)$

c ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy x

d ... ovlivňuje posunutí grafu ve směru osy y



22 Nejprve určíme obsah půlkruhu:

$S_1 = \frac{\pi c^2}{8} \doteq 353{,}43\ \text{m}^2$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (podle Thaletovy věty), k určení jeho obsahu tedy stačí znát délky jeho odvěsen:

$a = c \cdot \cos\beta \doteq 24{,}57$ m
$b = c \cdot \sin\beta \doteq 17{,}21$ m

Obsah trojúhelníku ABC je tedy:

$S_2 = \frac{a \cdot b}{2} \doteq 211{,}42\ \text{m}^2$

Poměr obsahů je:

$\frac{S_1}{S_2} \doteq 0{,}60 \sim 60\%$

Plocha záhonů tvoří doplněk do 100 %, což je 40 %.

A) 35%
B) 40%
C) 42%
D) 45%
E) 48%

23 Normálovým vektorem hledané přímky p je např. vektor $\overrightarrow{BA} = (8; -4)$.
Pro sestavení obecné rovnice přímky p použijeme k- násobek vektoru AB
$\vec{n}_p = (2; -1)$.

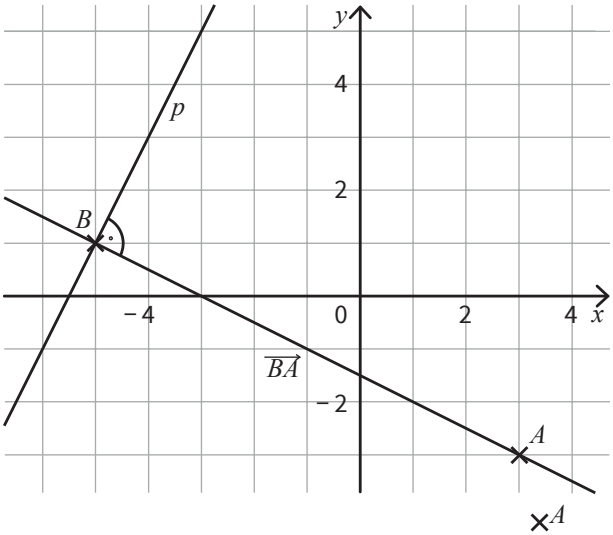
Rovnice tedy bude mít tvar:
$p: 2x - y + c = 0$

Neznámý koeficient c dopočítáme dosazením souřadnic bodu B, který na přímce p leží:
$2(-5) - 1 + c = 0$

$c = 0$
Přímka p má tedy rovnici:
$\mathbf{p: 2x - y + 11 = 0}$

Libovolný nenulový násobek této rovnice je opět rovnicí stejné přímky.
Takže pokud bychom použili přímo vektor $\overrightarrow{BA}$, dostali bychom rovnici p: $8x + 4y + 44 = 0$, která je také správným řešením.

A) $p: x + 2y + 3 = 0$
B) $p: x - 2y + 7 = 0$
C) $p: 2x - y + 7 = 0$
D) $p: 2x - y + 11 = 0$
E) $p: x + 2y + 11 = 0$



24 K_{10} = 3 500 000 Kč (dlužná částka po deseti letech)
p = 0,048 (úroková míra, vyjádřená desetinným číslem)
n = 10 (počet úrokovacích období)
k = 1 (zdaňovací koeficient, v tomto případě se nemusí uvádět)

Pro výši dlužné částky po n letech platí vztah:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p \cdot k)^n$$

Vyjádříme počáteční výši úvěru:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}$$

po dosazení:

$$K_0 = \frac{3\,500\,000 \text{ Kč}}{(1+0,048)^{10}} \doteq 2\,190\,000 \text{ Kč}$$

A) 2 190 000 Kč
B) 2 240 000 Kč
C) 2 280 000 Kč
D) 2 390 000 Kč
E) jinou částku

25 Souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic koncových bodů úsečky.
Pro výpočet vzdálenosti bodů A, B používáme vzorec: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

25.1
$a = |BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{68} =$ **$2\sqrt{17}$ ... F)**

25.2
Nejprve určíme střed strany a:

$$S_a\left[\frac{4-4}{2}; \frac{5+3}{2}\right] = [0; 4]$$

$t_a = |AS_a| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} =$ **$\sqrt{13}$ ... A)**

25.3
$c = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = 20 =$ **$2\sqrt{5}$ ... B)**

25.4

$$S_c\left[\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right] = [3; 3]$$

$t_c = |CS_c| = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49+0} =$ **7 ... D)**

Při určování velikosti úsečky nezáleží na pořadí, ve kterém odečítáme souřadnice bodů. Ale při určování souřadnic vektoru na tomto pořadí záleží. Od souřadnic koncového bodu musíme odečítat souřadnice počátečního bodu.

26 Pravidelný desetiúhelník můžeme rozdělit na 10 shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Vnitřní úhel proti základně má tedy velikost $\frac{360°}{10} = 36°$.

Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180°, mají zbylé vnitřní úhly velikost 72°.

Vyznačené úhly pak mají velikost:

26.1 $\alpha = 3 \cdot 36° =$ **108° ... C**
26.2 $\beta = 2 \cdot 72° =$ **144°... D**
26.3 $\gamma =$ **72°... E**

U pravidelných n-úhelníků bývá také často za úkol výpočet poloměru kružnice vepsané a opsané. V těchto typech příkladů se také vyplatí rozdělit n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků a dále pracovat s jedním z nich.

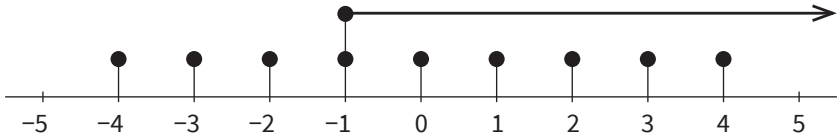
ŘEŠENÍ – TEST 4

1 Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, tj.:

$A = \{x \in Z\}; |x| < 5 = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu –1, tj.:

$B = \{x \in R\}; x \geq -1 = \langle -1; \infty)$



Průnik množiny A a B bude obsahovat čísla, která mají obě množiny společné, tj. čísla, která patří jak do množiny A, tak do množiny B.
Průnik těchto dvou množin obsahuje pouze 6 čísel:

$A \cap B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Množina A obsahuje celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 5, obsahuje pouze 9 čísel.
Množina B obsahuje reálná čísla, která jsou větší nebo rovna číslu –1, obsahuje tedy nekonečně mnoho čísel v intervalu $\langle 1; \infty)$.
Špatně by bylo, kdybychom zapsali výsledek jako interval, tj. $\langle 1; 4 \rangle$.

2 Litry si převedeme na cm³:

829 litrů = 829 dm³ = 829 000 cm³

Číslo a, které splňuje podmínku

$1 \leq a < 10$ je 8,29.

Abychom dostali číslo 829 000, musíme 8,29 vynásobit číslem 100 000, tj. číslem 10^5, proto je 829 000 cm³ = **$8{,}29 \cdot 10^5$ cm³**.

3 $\frac{x^2-5}{x-5} - 1 = \frac{x^2-5-(x-5)}{x-5} = \frac{x^2-5-x+5}{x-5} = \frac{x^2-x}{x-5}$

4 Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Jestliže druhý den přišlo na výstavu o 50 osob více, bylo tam tedy $(k + 50)$ osob

a ty zaplatily $\frac{m}{k}(k+50)$ korun.

Výraz se dá upravit a roznásobit do tvaru:

$m + 50\frac{m}{k}$

Jiný postup řešení:
Cena jedné vstupenky na výstavu je $\frac{m}{k}$ korun.

Pokladní tedy druhý večer vybrala opět m korun,

ale navíc ještě od 50 osob $50\frac{m}{k}$ korun.

Tedy celkem za druhý večer vybrala $(m + 50\frac{m}{k})$ korun.

Žáci zde často dělají chybu, že ve zlomku krátí x^2 v čitateli s x ve jmenovateli a –5 v čitateli i jmenovateli. Případně by se mohlo stát, že žák v euforii, že je v čitateli jasný vzorec, rozloží čitatel chybně na součin $(x - 5)(x + 5)$ a poté krátí čitatel a jmenovatel, k čemuž tato úloha opravdu svádí.
V zadání není uvedeno, že máme určit podmínky. Proto je zde neurčujme! V případě, že je určíme a budou správné (tj. $x \neq 5$), nic se neděje.
V případě, že je určíme chybně, pravděpodobně za ně bude odečten bod, tj. i když máme správně výsledek, získáme za úlohu jen 1 bod, protože u široce otevřených úloh se hodnotí vše, co žák do záznamového archu napíše.
Pozor: u rovnice s neznámou ve jmenovateli je naopak důležité podmínky určit, i když to v zadání není napsané. Můžeme tím zjistit, že výsledek, který nám vyšel, není v souladu s podmínkami a řešením rovnice tedy není.

5 $\frac{2x^2 - 9x + 9}{2x - 3} = 1$

Podmínky: jmenovatel se nesmí rovnat 0, tj. $2x - 3 \neq 0$, z toho plyne, že $x \neq \frac{3}{2}$.

Dále budeme řešit samotnou rovnici. Celou rovnici vynásobíme výrazem $2x - 3$:

$2x^2 - 9x + 9 = 2x - 3$

Převedeme si všechny členy na levou stranu:

$2x^2 - 9x + 9 - 2x + 3 = 0$

Získáme kvadratickou rovnici:

$2x^2 - 11x + 12 = 0$

Koeficienty této rovnice jsou: $a = 2$, $b = -11$, $c = 12$

Pro diskriminant kvadratické rovnice platí vztah: $D = b^2 - 4ac$. Dosadíme koeficienty a získáme

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Po dosazení získáme:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}$

Pro jednotlivé kořeny platí:

$x_1 = \frac{11 + 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$x_2 = \frac{11 - 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Porovnáme výsledky s podmínkami a zjistíme, že kořen x_2 nesplňuje podmínky řešitelnosti, proto je řešením zadané rovnice pouze číslo $x = 4$.

***K* = {4}**

6 6.1

Průsečíky s osou x jsou ty body grafu funkce f, které mají nulovou y-ovou souřadnici, proto:

$y = x^2 + 3x - 40 = 0$

Budeme řešit kvadratickou rovnici. Vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-40) = 169$.

Dosadíme do vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 13}{2}$

$x_1 = 5, x_2 = -8$

P_x = [5; 0], P'_x = [−8; 0]

6.2

Nejdříve vypočítáme vrchol paraboly. Pro x-ovou souřadnici vrcholu platí vzorec:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$

Souřadnici y_v dopočítáme dosazením za x do předpisu funkce $\left(\text{Nebo použijeme vzorec: } y_v = \frac{b^2}{2a}\right)$.

$$y_v = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 40 = -\frac{169}{4}$$

Funkce f má koeficient $a = 1 > 0$, tj. parabola bude otevřená směrem nahoru.

Obor hodnot funkce tedy bude:

$$H_f = \left\langle -\frac{169}{4}; \infty \right)$$

7 $5 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+1} + 108 = 0$

$$5 \cdot \frac{3^x}{3} - 3 \cdot 3^x = -108$$

$$5 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x = -324$$

$$-4 \cdot 3^x = -324$$

$$3^x = 81$$

$$x = 4$$

8 Katalogová cena košile ... x Kč

Po zvýšení o čtvrtinu hodnoty ... $\left(x + \frac{1}{4}x\right)$ Kč

Po snížení o 360 Kč ... $\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right)$ Kč

Cena 8 košilí ve výprodeji stojí stejně jako 1 košile za katalogovou cenu, tj.

$$8\left(x + \frac{1}{4}x - 360\right) = x$$

$$8x + 2x - 2880 = x$$

$$9x = 2880$$

$$x = 320$$

Katalogová cena jedné košile byla **320 Kč**.

9 Fotografie má tvar obdélníku a její plocha je rovna obsahu obdélníku, tj. 21 cm · 14 cm = 294 cm².

Plocha obrazu včetně rámu je dvojnásobná, tj. $S_{obrazu} = 2 \cdot 294\ \text{cm}^2 = 588\ \text{cm}^2$.

Označíme si šířku rámu x, pak délky stran obrazu jsou $(21 + 2x)$ cm a $(14 + 2x)$ cm :

$S_{obrazu} = (21 + 2x)(14 + 2x) = 588$ (kde x je šířka rámu)

Po úpravě:

$2x^2 + 35x - 147 = 0$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = 2401$

Pro kořeny kvadratické rovnice platí vztah: $x_{1,2} = \frac{-35 \pm 49}{2}$

$x_1 = 3{,}5$ a $x_2 = -21$

Zadání úlohy vyhovuje pouze kladný kořen (x je šířka rámu), tj. $x = 3{,}5$ cm.

Rozměry obrazu: 14cm + 2 · 3,5 cm = **21 cm** a 21 cm + 2 · 3,5 cm = **28 cm**.

10 Hledáme čtveřici čísel, z nichž každé je jiné a záleží na pořadí, jde tedy o variace bez opakování.

Vybíráme celkem z deseti čísel (0, 1, 2 až 9) a vybíráme čtyři čísla, tj.
zápis variace 4. třídy z 10 prvků

$$V = \frac{10}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

11 11.1
Celkový počet objednávek je 141, tj. je to liché číslo, zajímá nás tedy údaj, který je u 71. objednávky, a to je **srpen**.

11.2
Modus je měsíc, ve kterém bylo učiněno nejvíce objednávek, tj. **červen**.

12 $\left(\frac{3}{n^2 n^4}\right)^{-1} - \left(\frac{n^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{n^6}\right)^{-1} - \frac{n^6}{27} = \frac{n^6}{3} - \frac{n^6}{27} = \frac{9n^6 - n^6}{27} = \frac{8n^6}{27}$ nebo $\frac{8}{27}n^6$

13 Na začátku stál robot 390 000 Kč,
po prvním roce stál $p \cdot 390\,000$ Kč,
po druhém roce $p^2 \cdot 390\,000$ Kč,
po třetím roce $p^3 \cdot 390\,000$ Kč.

Tj. $p^3 \cdot 390\,000$ Kč = 24 960 Kč,

vypočítáme p a vyjde

$p = 0{,}4 = 40$ %. Odepisujeme tedy 100 % – 40 % = **60 %**.

14 První dvě vytažené čokolády mají být mléčné:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je 3,

druhou čokoládu vybíráme už jen ze 6 čokolád, počet příznivých jevů (tj. mléčných čokolád v krabici) je nyní jen 2,

tj. $P = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

15 První vytažená čokoláda má být hořká a druhá mléčná:

první čokoládu vybíráme ze 7 čokolád a počet příznivých jevů je 4,

druhou vybíráme už jen ze 6 čokolád a počet příznivých jevů (mléčných čokolád) je 3,

tj. $P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

16 16.1 A ☐ N ■

Upravíme výraz $A = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2$ podle vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\left(3x - \frac{y}{2}\right)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3x\,\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \mathbf{\neq 9x^2 - 3xy + 4y^2}$

16.2 A ■ N ☐

Upravíme výraz $A = a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2$; vytkneme z prvních dvou členů a^2 a z dalších dvou členů b^2,

tj. $a^3 - 9a^2 - ab^2 + 9b^2 = a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9)$.

A dále vytkneme závorku $(a - 9)$,

tj. $a^2\,(a - 9) - b^2\,(a - 9) = (a^2 - b^2)\,(a - 9)$

První závorka je vzorec, rozložíme podle něj závorku a získáme:

$(a^2 - b^2)\,(a - 9) \mathbf{= (a - b)\,(a + b)\,(a - 9)}$

Nebo můžeme upravovat výraz B – roznásobit postupně všechny závorky – a dojdeme tím k výrazu A.

16.3 A N

Upravíme výraz A, vydělíme čitatele i jmenovatele číslem 4:

$$\frac{4\,(x-2)}{x+8} = \frac{x-2}{\frac{x+8}{4}}$$

Ve jmenovateli rozdělíme zlomek na zlomky dva:

$$\frac{x-2}{\frac{x+8}{4}} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+\frac{8}{4}} = \mathbf{\frac{x-2}{\frac{x}{4}+2}}$$

Nebo můžeme upravovat výraz B a dojdeme tím k výrazu A.

16.4 A N

Upravíme výraz $A = (2-9k)^2 - 16$ podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$A = (2-9k)^2 - 16 = (2-9k-4)(2-k+4)$.

Závorky upravíme a získáme výraz:

$(-2-9k)(6-9k) \neq \mathbf{(2-9k)(6-9k)}$

17 Čitatel zlomku na levé straně nerovnice je záporný (je roven –5).

Má-li být celý zlomek menší nebo roven nule, pak musí být jmenovatel zlomku kladný.

(POZOR: jmenovatel se nesmí rovnat nule!) Musí tedy platit:

$2x - 9 > 0$

$2x > 9$

$x > \frac{9}{2}$

tj. $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ **C)** $\left(\frac{9}{2}; \infty\right)$

18 Jablek ..... 16 ks, nezralých jablek ..... 16 : 4 = 4 ks, vyhodíme 2 ks ..... zůstala 2 nezralá jablka

Banánů ..... 28 ks, nezralých banánů ..... 28 : 4 = 7 ks, vyhodíme 2 ks ..... zůstalo 5 ks nezralých banánů,

Celkem ..... 44 ks, nezralé ovoce celkem ..... 11 ks, vyhodíme 4 ks ..... zůstalo 7 ks nezralého ovoce.

Na začátku: 100 % ..... 44 ks ovoce

x % ..... 11 ks nezralého ovoce

$x = \frac{11}{44} \cdot 100\,\% = 25\,\%$

Nebo také: jestliže je nezralá čtvrtina jablek a čtvrtina banánů, pak je nezralá čtvrtina ovoce, tj. 25 %.

Po vyhození: 100 % ..... 40 ks ovoce

x % ..... 7 ks nezralého ovoce

$x = \frac{7}{40} \cdot 100\ \% = 17,5\ \%$

Závěr: 25 % - 17, 5 % = 7, 5 %.

Jestliže vyhodíme 2 nezralá jablka a 2 nezralé banány, klesne v bedně počet nezralého ovoce o 7, 5 %. B)

19 $R = k \cdot \frac{d}{S}$

Pravou i levou stranu rovnice vynásobíme veličinou S, potom:

$R \cdot S = k \cdot d$

Pravou i levou stranu rovnice vydělíme veličinou k, potom:

$\frac{RS}{k} = d$

$d = \frac{RS}{k}$ **D)** $d = \frac{RS}{k}$

20 Poměr stran obdélníku je 4:3, strana $a = 4x$ a strana $b = 3x$, pro obvod platí $o = 28 = 2(a + b)$, tj.

$28 = 2(4x + 3x)$, a odtud vypočítáme, že $x = 2$ cm, tedy $a = 4 \cdot 2$ cm = 8 cm, $b = 3 \cdot 2$ cm = 6 cm.

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven obsahu dvou trojúhelníků CDS.

Obsah trojúhelníku CDS: $S = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12\ \text{cm}^2$

Obsah čtyřúhelníku $SCED$ je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku CDS, tj. $S = 2 \cdot 12 = 24\ \text{cm}^2$.

A) 24 cm²

21 Papír má tvar obdélníku, obsah tohoto obdélníku, tedy 1 ks papíru je: $S = 0,21 \cdot 0,297 = 0,06237\ \text{m}^2$.

Obsah 500 ks papírů; (tj. jednoho balení) je: $S = 500 \cdot 0,06237\ \text{m}^2 = 31,185\ \text{m}^2$.

1 m² ..... 80 g

31,185 m² ..... x g

$x = 31,185 \cdot 80 = 2494,8$ g = 2,4948 kg ≐ **2,5 kg D)**

22 Podle tvaru grafu jde o exponenciální funkci. **E)** $y = 3^x - 1$

Grafem A) by byla přímka,
grafem B) parabola,
grafem C) hyperbola, logaritmická funkce
D) graf logaritmické funkce, není ale definován pro x menší nebo rovno 0
E) exponenciála (rostoucí), posunutá o 1 dolů

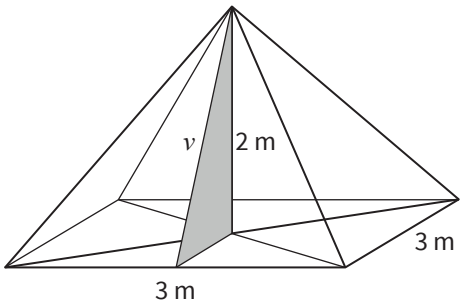
Případně můžeme i zkoušet za x a y dosazovat hodnoty a ověřovat, jestli bod leží na grafu funkce, např. u funkce A) zkusíme za x dosadit −1, v tom případě $y = -2$, ale bod [−1; −2] neleží na grafu funkce f apod.

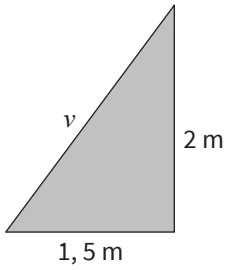
23 Nakreslíme si jehlan (střechu) a popíšeme prvky, které známe.

Střecha se skládá ze čtyř shodných trojúhelníků se základnou 3 m.

Označíme si výšku v trojúhelníku, ze kterého budeme výšku počítat.

Trojúhelník je pravoúhlý, z Pythagorovy věty získáme v: $v^2 = 1{,}5^2 + 2^2$, tj. $v = 2{,}5$ m.

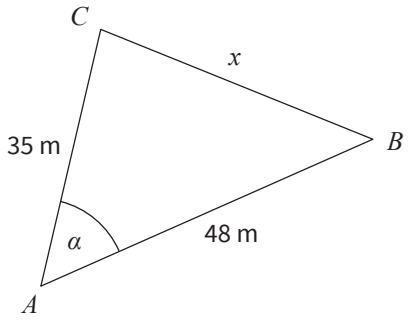




Nyní již můžeme vypočítat plochu střechy: $S = 4 \cdot S_{troj.} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5}{2} = 15\ \text{m}^2$. **D) 15 m²**

24 V trojúhelníku známe dvě strany a úhel mezi nimi, úkolem je spočítat stranu proti úhlu.

Délku strany CB tedy spočítáme pomocí kosinové věty.



$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$x^2 = 35^2 + 48^2 - 2 \cdot 35 \cdot 48 \cdot \cos 53°25' \doteq 1526{,}47$

$x \doteq 39$ m **B) 39 m**

25 Nejprve určíme souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC: $A = [-2; -1]$, $B = [4; -3]$, $C = [1; 3]$.

25.1

Souřadnice středu S strany AB vypočítáme ze vztahu $S = \frac{A + B}{2}$, tj. $S = \left[\frac{-2+4}{2}; \frac{-1-3}{2}\right] = [1; -2]$.

Nyní vypočítáme souřadnice směrového vektoru přímky $\overleftrightarrow{SC}$,

$\vec{s} = \overrightarrow{SC} = (1 - 1; 3 - (-2)) = (0; 5)$.

Vektor (0; 5) má z nabízených souřadnic stejný směr jako vektor (0; 1) **E) (0; 1)**

25.2
Směrový vektor přímky BC je $\overrightarrow{BC} = (1 - 4; 3 - (-3)) = (-3; 6) \sim (-1; 2)$.

Normálový vektor přímky BC je tedy $\vec{n} = (2; 1)$ ... přehodíme x-ovou a y-ovou souřadnici a u jedné změníme znaménko. **B) (2; 1)**

25.3
Je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AC, mají stejné směrové vektory bez ohledu na to, kterým bodem přímka p prochází. Směrový vektor přímky p je tedy:

$\vec{s} = \overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$ **F) (3; 4)**

25.4
Směrový vektor osy x má souřadnice (1;0).

Jestliže to nevíme, můžeme si na ose x zvolit libovolné dva body, např. $O = [0; 0]$ a $D = [1; 0]$, a určit směrový vektor osy x jako směrový vektor přímky OD,

$\vec{s} = \overrightarrow{OD} = (1 - 0); 0 - 0) = (1; 0)$.

Z nabízených vektorů má stejný směr vektor (5; 0). **C) (5; 0)**

26 26.1
Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože rozdíl počtu cestujících každých dvou sousedních vagonů je stejný (diference d). $a_{20} = 97$, $a_{30} = 147$, $a_1 = ?$

$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

$d = \frac{a_r - a_s}{r - s} = \frac{147 - 97}{30 - 20} = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d = 97 - (20 - 1) \cdot 5 = 2$

A) 2

26.2
$s_{10} = ?$

$s_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$

Vypočítáme desátý člen:

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 27 + 9 \cdot 5 = 47$

$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 47) = 245$

E) 245

26.3
$a_{31} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot d = 2 + 30 \cdot 5 = 152$

D) 152

nebo $a_{31} = a_{30} + d = 147 + 5 = 152$