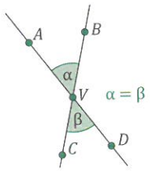
PLANIMETRIE

ZÁKLADNÍ POJMY

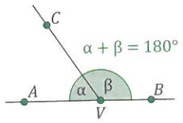
- přímka je určena dvěma body, zapisujeme $p = \leftrightarrow AB$
- bod C na přímce p leží ($C \in p$) nebo neleží ($C \notin p$)
- bod P ležící na přímce rozděluje přímku na dvě polopřímky se společným počátkem
- úsečku definujeme jako průnik dvou polopřímek
- přímka dělí rovinu na dvě poloroviny, hraniční přímka patří do obou polorovin
- dvě různé polopřímky VA a VB dělí rovinu na dva úhly, úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátkem

DVOJICE ÚHLŮ

- **vrcholové úhly**
  - mají společný vrchol a jejich ramena leží v opačných polopřímkách
  - vrcholové úhly jsou shodné, jejich velikosti jsou stejné

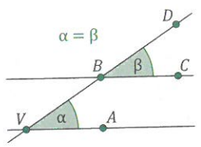


- **vedlejší úhly**
  - mají jedno rameno společné, druhá ramena jsou navzájem opačné polopřímky
  - součet jejich velikostí je 180°

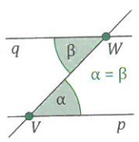


- **souhlasné a střídavé úhly**
  - první ramena jsou rovnoběžná, druhá leží na jedné přímce
  - jsou shodné, jejich velikosti jsou stejné

střídavé:

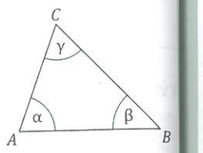


souhlasné:

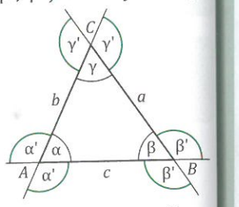


TROJÚHELNÍK

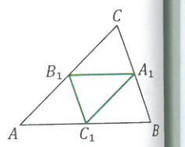
- trojúhelník ABC (zapisujeme $\triangle ABC$) je průnik polorovin ABC, BCA, CAB (body A, B, C jsou různé a neleží v jedné přímce)
- vrcholy označujeme velkými, strany malými písmeny, zpravidla proti vrcholu A leží strana a atd.
- **vnitřní úhly trojúhelníku** α, β, γ
  - součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



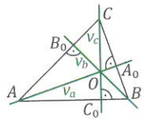
- **vnější úhly trojúhelníku** α', β', γ' jsou úhly vedlejší k vnitřním
  - pro velikosti platí:
    - $\alpha' = 180° - \alpha$, $\beta' = 180° - \beta$, $\gamma' = 180° - \gamma$
    - $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

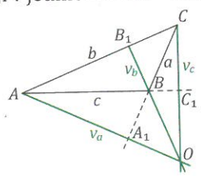


- **střední příčka v trojúhelníku** spojuje středy dvou stran, je rovnoběžná s třetí stranou, její délka je rovna polovině délky této strany

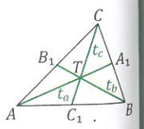


- **výška v trojúhelníku** je kolmice vedená z vrcholu trojúhelníku k protější straně, krajními body jsou vrchol a pata kolmice; všechny přímky, v nichž leží výšky trojúhelníku, se protínají v jediném bodě – ortocentru

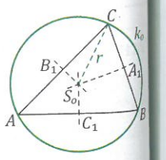




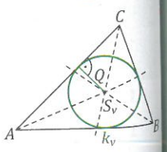
- **těžnice v trojúhelníku** je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany; všechny těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě – těžišti; těžiště dělí těžnici na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 1



- **kružnice opsaná trojúhelníku** prochází všemi vrcholy trojúhelníku; její střed najdeme jako průsečík os stran trojúhelníku

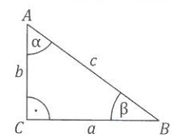


- **kružnice vepsaná trojúhelníku** se dotýká všech stran trojúhelníku; její střed najdeme jako průsečík os vnitřních úhlů

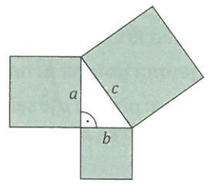


TROJÚHELNÍK

- **Věty o shodnosti trojúhelníků:**
  - **sss:** dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné
  - **usu:** dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně, jsou shodné
  - **sus:** dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné
  - **ssu:** dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné
- **podobné trojúhelníky**
  - trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC (zapisujeme $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$) právě tehdy, když existuje kladné číslo k (koeficient nebo poměr podobnosti trojúhelníků) tak, že pro jejich strany platí $|A'B'| = k \cdot |AB| \wedge |B'C'| = k \cdot |BC| \wedge \wedge |C'A'| = k \cdot |CA|$ (tedy $c' = kc \wedge a' = ka \wedge b' = kb$)
  - důsledek: dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když poměr délek každých dvou stran jednoho trojúhelníku se rovná poměru délek příslušných stran druhého trojúhelníku, tedy $a' : b' : c' = a : b : c$
- **Věty o podobnosti trojúhelníků:**
  - **uu:** dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné
  - **sus:** dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné
- **Vztahy v trojúhelníku:**
  - obvod: $o = a + b + c$
  - obsah: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$; $S = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2}$
  - sinová věta: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$, kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané
  - kosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- **pravoúhlý trojúhelník**
  - odvěsny a, b svírají pravý úhel
  - přepona c leží proti pravému úhlu

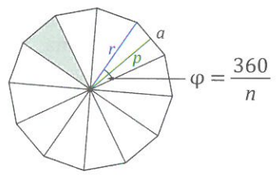


- **Pythagorova věta**
  - obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami; $c^2 = a^2 + b^2$
  - **sinus:** poměr délky protilehlé odvěsny a přepony; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$
  - **kosinus:** poměr délky přilehlé odvěsny a přepony; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$
  - **tangens:** je poměr délky protilehlé a přilehlé odvěsny; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$
  - **kotangens:** je poměr délky přilehlé a protilehlé odvěsny; $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$, $\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{a}{b}$



MNOHOÚHELNÍKY

- mnohoúhelník je uzavřená lomená čára spolu s částí roviny, kterou ohraničuje
- konvexní mnohoúhelník leží celý v jedné z polorovin určených kteroukoliv stranou
- úhlopříčka je spojnice dvou nesousedních vrcholů
- součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku: $(n - 2) \cdot 180°$
- počet úhlopříček v konvexním mnohoúhelníku: $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$
- pravidelný n-úhelník má všechny strany shodné a všechny vnitřní úhly shodné a lze mu opsat kružnici s poloměrem r
- obsah určíme jako součet obsahů n rovnoramenných trojúhelníků
- obvod je n-násobek délky jedné strany



$\varphi = \frac{360}{n}$

$o = n \cdot a$

$S = n \cdot S_\triangle = n \cdot \frac{a\varrho}{2}$

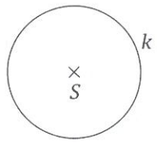
ČTYŘÚHELNÍKY

- **různoběžník**
  - žádné dvě strany nejsou rovnoběžné
- **lichoběžník**
  - dvě strany jsou rovnoběžné (základny) a zbývající dvě strany (ramena) nejsou rovnoběžné
  - obsah: $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$
  - rovnoramenný lichoběžník – ramena stejně dlouhá
  - pravoúhlý lichoběžník – jedno rameno je kolmé k základně
- **rovnoběžník**
  - obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné
  - kosoúhlý (kosodélník, kosočtverec) nebo pravoúhlý (obdélník, čtverec)
  - protější strany rovnoběžníku jsou shodné
  - protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné
  - úhlopříčky se navzájem půlí, jejich společný střed je střed rovnoběžníku

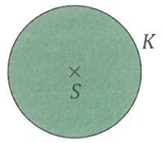
	čtverec	obdélník	kosočtverec	kosodélník
S	a^2	ab	$a \cdot v$ / $\frac{e \cdot f}{2}$	$a \cdot v_a$ / $b \cdot v_b$

KRUŽNICE, KRUH

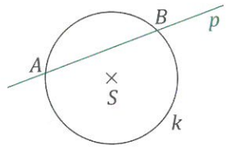
- **kružnice** se středem S a poloměrem r (značíme $k(S; r)$) je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost r
  - $k(S; r) = \{X; |XS| = r\}$
  - délka kružnice: $l = 2\pi r$



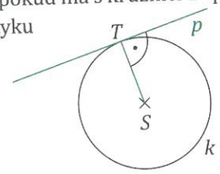
- **kruh** se středem S a poloměrem r (značíme $K(S; r)$) je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnou r
  - $K(S; r) = \{X; |XS| \leq r\}$
  - obsah kruhu: $S = \pi r^2$
  - obvod kruhu: $o = 2\pi r$



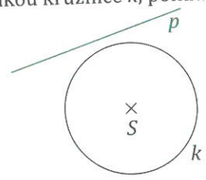
- **Vzájemná poloha přímky a kružnice:**
  - **sečna:** přímka p je sečnou kružnice k, pokud má s kružnicí 2 společné body A a B; kružnice vytíná na přímce úsečku AB – úsečka AB je tětiva kružnice



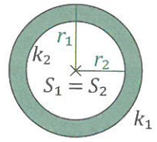
  - **tečna:** přímka p je tečnou kružnice k, pokud má s kružnicí 1 společný bod T (bod dotyku); tečna je kolmá na poloměr kružnice procházející bodem dotyku

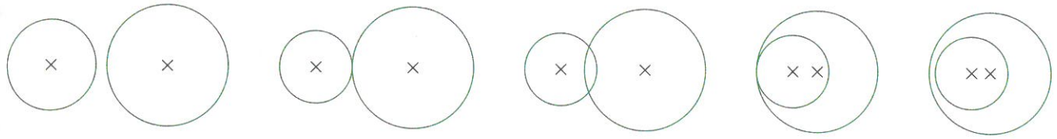


  - **vnější přímka:** přímka p je vnější přímkou kružnice k, pokud nemá s kružnicí žádný společný bod

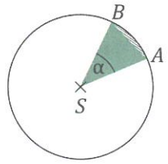


- **Vzájemná poloha dvou kružnic:**
  - mají-li dvě kružnice společný střed, nazývají se soustředné; oblast ohraničená dvěma soustřednými kružnicemi včetně hraničních kružnic je **mezikruží**
  - kružnice, které nemají společný střed, mohou mít žádný, jeden nebo dva společné body:



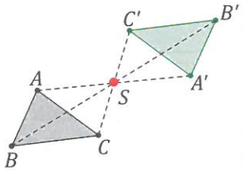
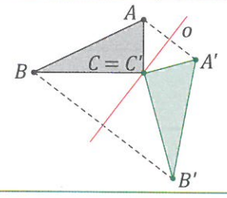
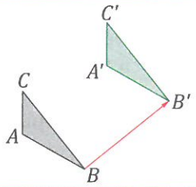
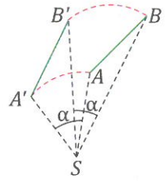


- **kruhová výseč**
  - část kruhu ohraničená dvěma poloměry a kružnicovým obloukem je sjednocením rovnoramenného trojúhelníku a kruhové úseče
  - obsah kruhové výseče: $S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$ (α – velikost středového úhlu ve stupních) nebo $S = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha$ (α – velikost středového úhlu v obloukové míře)



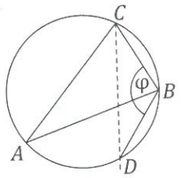
SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

- zobrazení v rovině je shodné zobrazení právě tehdy, když obrazem libovolné úsečky AB je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB
- bod M se nazývá samodružný v nějakém zobrazení, jestliže se v tomto zobrazení zobrazí sám na sebe, tj. $M = M'$
- přímka p se nazývá samodružná v nějakém zobrazení, jestliže se v tomto zobrazení zobrazí sama na sebe, tj. $p = p'$

	Určení	Konstrukce obrazu útvaru	Samodružné body	Samodružné přímky
Středová souměrnost	středem souměrnosti S		S	všechny přímky procházející středem souměrnosti
Osová souměrnost	osou souměrnosti o		všechny body na ose souměrnosti	osa souměrnosti, všechny přímky kolmé k ose souměrnosti
Posunutí	orientovanou úsečkou		nejsou	všechny přímky rovnoběžné se směrem posunutí
Otočení	středem a úhlem otočení		střed souměrnosti	obecně nejsou (otočení o 180° je středová souměrnost, otočení o 360° je identita)

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

1 **V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 46°$ a $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Osa vnitřního úhlu ACB protíná kružnici trojúhelníku ABC opsanou v bodech C, D. Vypočtěte velikost úhlu $\varphi = |\sphericalangle CBD|$.**



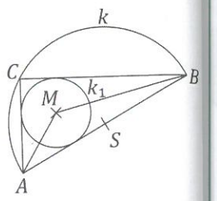
$|\sphericalangle ABC| = 180° - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB| =$
$= 180° - 46° - 60° = 74°$

$|\sphericalangle ACD| = 30°$

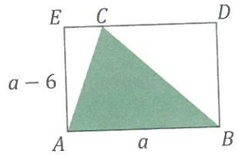
$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$ (obvodové úhly k jednomu oblouku)

$\varphi = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ABD| = 74° + 30° = 104°$

1 **Pravoúhlému trojúhelníku ABC je opsána kružnice k a vepsána kružnice k_1, bod M je střed kružnice k_1. Vypočtěte velikost úhlu AMB.**



2 **Obsah trojúhelníku na obrázku je 20 cm². Určete obvod obdélníku $ABDE$.**



$S = \frac{a(a-6)}{2}$

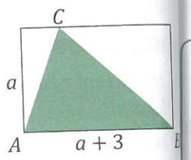
$20 = \frac{a(a-6)}{2}$

$a^2 - 6a - 40 = 0$

$a = 10 \vee a = -4 \notin D$

$o = 2(a + a - 6) = 2 \cdot 14\ \text{cm} = 28\ \text{cm}$

2 **Obvod obdélníku na obrázku je 54 cm. Určete obsah trojúhelníku ABC.**



3 **Obsah tupoúhlého trojúhelníku je 28,67 cm². Délky jeho dvou kratších stran jsou $a = 7$ cm, $b = 10$ cm. Vypočtěte velikost tupého úhlu.**

Tupý úhel leží proti nejdelší straně – bude to úhel γ při vrcholu C.

$S = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \cdot 28{,}67}{7 \cdot 10} = 0{,}819\,1$

$\gamma \doteq 180° - 55° = 125°$

3 **Trojúhelník ABC má obsah 8 cm², strana AB m délku 8 cm a úhel při vrcholu B velikost 30°. Vy počtěte délky zbylých stran.**

4 **Délky stran trojúhelníku jsou 12,5 cm, 10 cm a 8,5 cm. Rozdíl délek nejdelší a nejkratší strany jemu podobného trojúhelníku je 4,8 cm. Určete délku prostřední strany tohoto trojúhelníku.**

Hledané délky stran:

$a = 12{,}5 \cdot y$

$b = 10 \cdot y$

$c = 8{,}5 \cdot y$

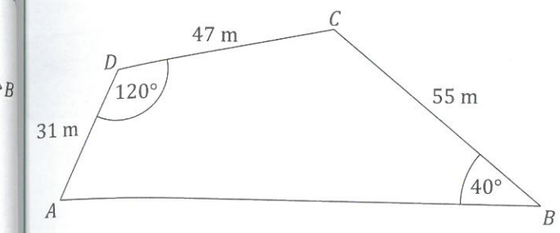
$12{,}5y - 8{,}5y = 4{,}8$

$y = 1{,}2$ cm

Prostřední strana $b = 10 \cdot 1{,}2$ cm $= 12$ cm.

4 **Délky stran trojúhelníku jsou 12,5 cm, 10 c a 8,5 cm. Nejdelší strana jemu podobnému tro úhelníku má délku 20 cm. Určete poměr obsah obou trojúhelníků.**

5 **Na obrázku je plán stavební parcely s některými údaji. Vypočtěte vzdálenost bodů A a C.**



Z trojúhelníku ACD:

$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD||CD| \cos 120°$

$|AC|^2 = 31^2 + 47^2 - 2 \cdot 31 \cdot 47 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4\,627$

$|AC| \doteq 68$ m

5 **Určete velikost největšího úhlu v trojúhelníku, který má strany dlouhé 3 cm, 8 cm a 9 cm. Výsledek vyjádřete ve stupních s přesností na minuty.**

6 **Dva úhly v trojúhelníku mají velikost $\alpha = 36°$ a $\beta = 75°$, délka nejkratší strany trojúhelníku je 10 cm. Vypočtěte délku nejdelší strany daného trojúhelníku v centimetrech s přesností na jedno desetinné místo.**

Vypočítáme velikost třetího úhlu v daném trojúhelníku:

$\gamma = 180° - (36° + 75°) = 69°$

Nejkratší strana trojúhelníku je tedy strana proti úhlu α, označíme ji a.

Nejdelší strana trojúhelníku leží proti největšímu úhlu, bude to strana b proti úhlu β.

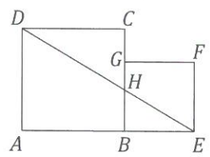
Podle sinové věty pak $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow$

$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{10 \cdot \sin 75°}{\sin 36°} \doteq 16{,}4$ cm

6 **Délky stran trojúhelníku ABC jsou $a = 12$ cm, $c = 9$ cm, velikost úhlu jimi sevřeného $\beta = 89° 17'$. Jak dlouhá je strana b (s přesností na jedno desetinné místo)?**

A) 14,0 cm
B) 14,5 cm
C) 15,0 cm
D) 15,5 cm
E) 16,0 cm

7 **Jsou dány čtverce $ABCD$ a $BEFG$ (viz obrázek), $|AB| = 7$ cm, $|BE| = 5$ cm. Vypočtěte délku úsečky DE. Určete poměr délek úseček $|BH| : |HG|$.**



Pythagorova věta pro trojúhelník AED:

$|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 = 12^2 + 7^2 = 144 + 49 = 193$

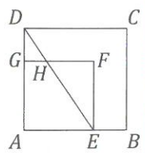
$|DE| = \sqrt{193}$ cm

$\triangle AED \sim \triangle BEH \Rightarrow \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|BH|}$

$\frac{12}{7} = \frac{5}{|BH|} \Rightarrow |BH| = \frac{35}{12}, |HG| = 5 - \frac{35}{12} = \frac{25}{12}$

$|BH| : |HG| = \frac{35}{12} : \frac{25}{12} = 35 : 25 = 7 : 5$

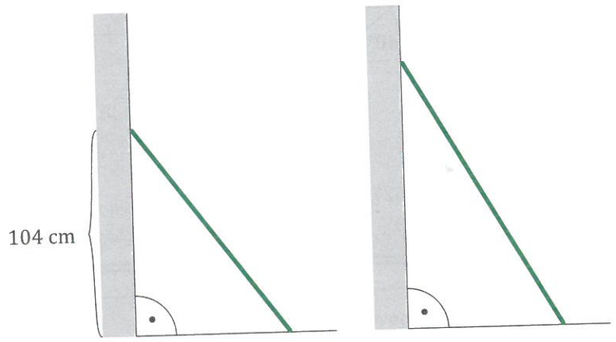
7 **Jsou dány čtverce $ABCD$ a $AEFG$ (viz obrázek), $|AB| = 7$ cm, $|AE| = 5$ cm. Vypočtěte délku úsečky DE. Určete poměr délek úseček $|GH| : |HF|$.**



NEJČASTĚJŠÍ CHYBY U MATURITNÍ ZKOUŠKY

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

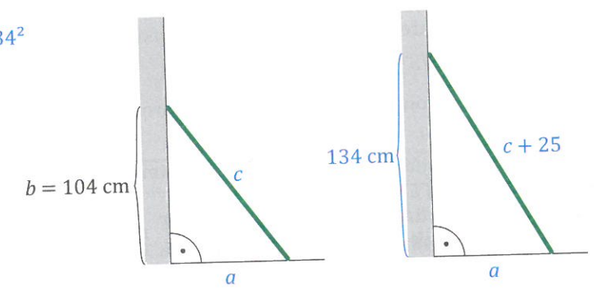
Teleskopická tyč je ukotvena ve vodorovné dlažbě a opřena o svislou zeď. Dosahuje do výšky 104 cm. Pokud tyč prodloužíme o 25 cm, dosáhne ze stejného místa o 30 cm výš.



1 **Jak daleko od stěny je tyč ukotvena? Počítejte s přesností na celé centimetry.**

MZ 2021

$$a^2 = a^2$$
$$c^2 - 104^2 = (c+25)^2 - 134^2$$
$$c^2 - 104^2 = c^2 + 50c + 25^2 - 134^2$$
$$-104^2 - 25^2 + 134^2 = 50c$$
$$6\,515 = 50c$$
$$c \doteq 130 \text{ cm}$$



$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 130^2 - 104^2$$
$$a^2 = 6\,084$$
$$a = 78 \text{ cm}$$

Tyč je ukotvena 78 cm od zdi.

Využijeme předkreslené obrázky, doplníme do nich zadané údaje a označíme si neznámé prvky.

Máme zde dva pravoúhlé trojúhelníky. Využijeme toho, že tyč je v obou případech ve stejné vzdálenosti od zdi. Sestavíme si pro oba případy Pythagorovu větu a dáme do rovnosti.

Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2$, kde c je délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, a, b jsou délky jeho odvěsen.

Nezapomeneme dopočítat údaj, abychom mohli správně odpovědět na otázku.

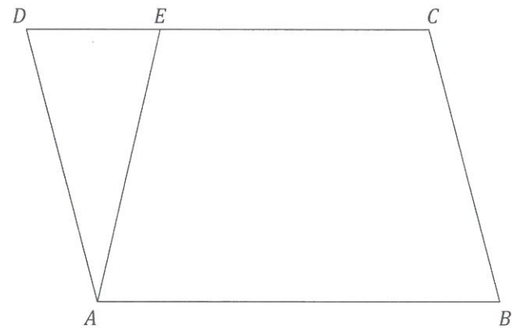
Pozor na správné sestavení Pythagorovy věty – musíme správně určit přeponu a odvěsny. Přepona je nejdelší strana v pravoúhlém trojúhelníku, a proto vždy leží proti největšímu (zde pravému) úhlu.

Pozor na správné umocnění součtu (vzorec): $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$!

Pozor na otázku – je třeba ještě dopočítat vzdálenost. V prvním kroku jsme dopočítali délku tyče.

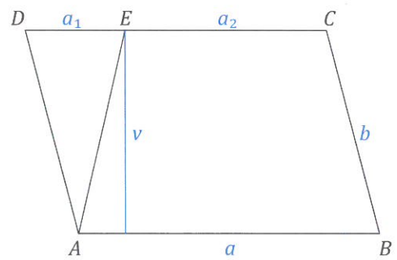
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

Rovnoběžník $ABCD$ se skládá z trojúhelníku AED a lichoběžníku $ABCE$. Obsah trojúhelníku AED je pětkrát menší než obsah lichoběžníku $ABCE$.



2 **Kolikrát je strana AB delší než strana EC?**
(Výsledek uveďte jako poměr v základním tvaru.)

MZ 2021



$a : a_2 = ?$

$a_1 + a_2 = a \quad \Rightarrow \quad a_1 = a - a_2$

$\triangle AED: S_1 = \dfrac{a_1 \cdot v}{2}$

$ABCE: S_2 = \dfrac{a + a_2}{2} \cdot v$

$$5 \cdot S_1 = S_2$$
$$5 \cdot \frac{a_1 \cdot v}{2} = \frac{a + a_2}{2} \cdot v \qquad | \cdot 2$$
$$5a_1 \cdot v = (a_2 + a) \cdot v \qquad | : v$$
$$5a_1 = a_2 + a$$
$$5 \cdot (a - a_2) = a_2 + a$$
$$5a - 5a_2 = a_2 + a$$
$$4a = 6a_2$$
$$\frac{a}{a_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a : a_2 = 3 : 2$$

Využijeme předkreslený obrázek, doplníme zadané údaje a označíme si neznámé prvky. Délku strany a zapíšeme jako součet délek $a_1 + a_2$.

Zapíšeme vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku a rovnoběžníku a tyto vzorce použijeme pro sestavení rovnice popsané v zadání. Výška v je výškou trojúhelníku i rovnoběžníku.

Neznámé údaje nedopočítáváme (ani to v tomto případě nelze), pouze určujeme požadovaný poměr.

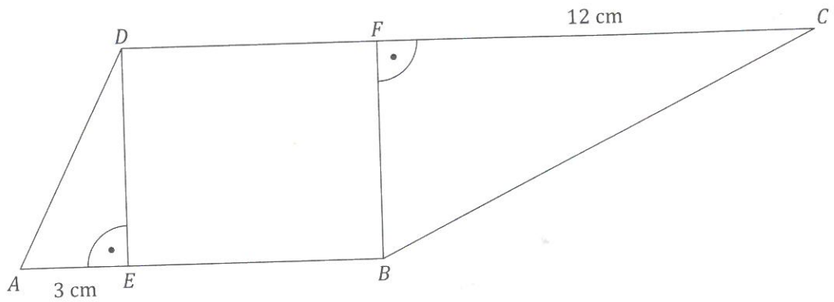
Příklad lze řešit i jinými způsoby.

Pozor na správné sestavení rovnice – trojúhelník má menší obsah, proto jej musíme vynásobit (v našem případě 5) tak, aby rovnost nastala.

Musíme využít i toho, že součet délek stran DE a EC je roven velikosti strany AB. Pak řešíme soustavu rovnic.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

Lichoběžník $ABCD$ se základnou AB je rozdělen body E a F na dva podobné trojúhelníky a obdélník. Platí $|AE| = 3$ cm, $|FC| = 12$ cm.



3 Vypočtěte poměr ramen AD a BC lichoběžníku.
(Výsledek uveďte jako poměr v základním tvaru.)

$\triangle AED \sim \triangle BFC$

$\frac{3}{v} = \frac{v}{12}$

$36 = v^2$

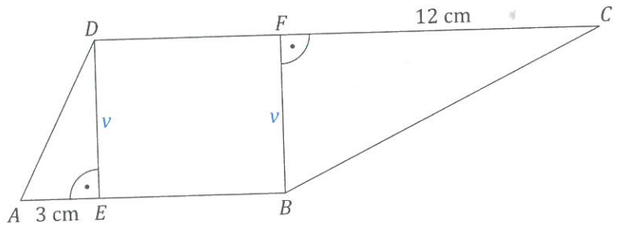
$v = 6$ cm

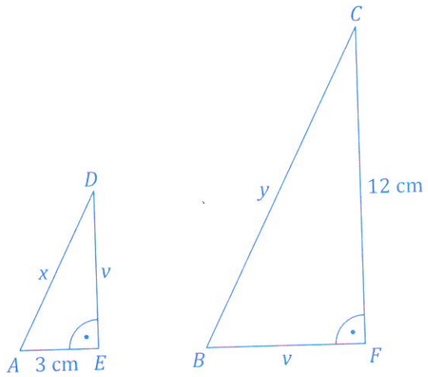
$k = \frac{3}{6}$

$k = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{y} = k$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x : y = 1 : 2$



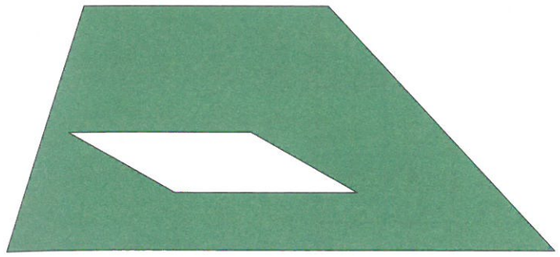


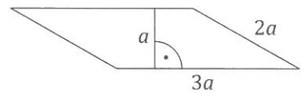
Využijeme předkreslené obrázky, doplníme zadané údaje a označíme si neznámé prvky.
Ze zadání plyne, že dané trojúhelníky jsou si podobné. Je dobré načrtnout si je vedle sebe tak, aby bylo zřejmé, které strany si odpovídají (přepony, „delší" odvěsny a „kratší" odvěsny).
Pokud jsou trojúhelníky podobné, platí, že poměr délek odpovídajících si stran je stejný:
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$: $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. S využitím podobnosti vypočítáme výšku lichoběžníku. Jestliže si hned neuvědomíme, že poměr délek odpovídajících si stran, a tedy i délek přepon je stejný, můžeme podle Pythagorovy věty dopočítat jejich délky a poté jejich poměr.

Pozor na správné zakreslení podobných trojúhelníků (tj. určení odpovídajících si stran). Je třeba zachovat pořadí členů v poměru pro všechny délky stran trojúhelníků – tedy i pro určení správné odpovědi.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Obrazec vznikl z papírového lichoběžníku vystřižením rovnoběžníku. Rovnoběžník má jednu stranu délky $3a$, druhou stranu délky $2a$ a výšku délky a. Lichoběžník má delší základnu třikrát delší, než je delší strana rovnoběžníku, a kratší základnu dvakrát delší, než je kratší strana rovnoběžníku. Výška rovnoběžníku je čtvrtinou výšky lichoběžníku.





MZ 2021

4 Jaký je obsah obrazce?

A) Menší než $3a^2$
B) $3a^2$
C) $23a^2$
D) $26a^2$
E) Větší než $26a^2$

Lichoběžník: $S_1 = \frac{a+c}{2} \cdot v$

$S_1 = \frac{9a + 4a}{2} \cdot 4a$

$S_1 = 13a \cdot 2a$

$S_1 = 26a^2$

Rovnoběžník: $S_2 = a \cdot v_a$

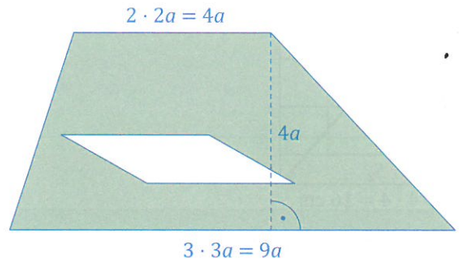
$S_2 = 3a \cdot a$

$S_2 = 3a^2$

$S = S_1 - S_2$

$S = 26a^2 - 3a^2$

$S = 23a^2 \rightarrow$ možnost C)

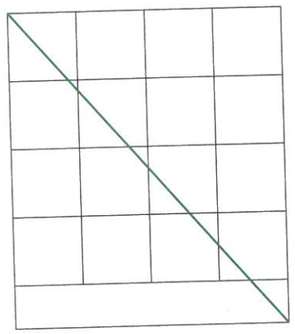


Využijeme předkreslené obrázky.
Podle zadání vyjádříme rozměry lichoběžníku. Je vhodné zapsat rozměry do předkresleného obrázku.
Dosadíme do vzorců pro výpočet obsahů lichoběžníku a rovnoběžníku.
Dopočítáme obsah výsledného obrazce – od obsahu lichoběžníku odečteme obsah rovnoběžníku.

Počítáme pouze obecně pomocí proměnné a.
Pozor na správné vyjádření rozměrů lichoběžníku a úpravy výrazů (např. $a + a = 2a$, $a \cdot a = a^2$).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Mozaika má tvar obdélníku. Mozaiku tvoří 16 čtverců, každý o obsahu 16 cm², a jeden obdélník, jehož obsah je 2,5krát větší než obsah jednoho čtverce.

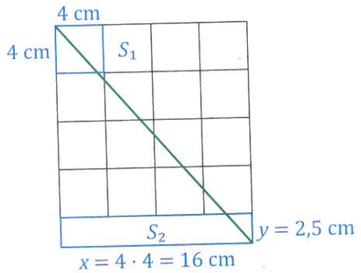


5

5.1 Vypočtěte kratší stranu obdélníku.

5.2 Určete, kolik procent mozaiky tvoří obdélník. Určete s přesností na desetiny procent.

5.3 Vypočtěte délku úhlopříčky celé mozaiky. Vypočtěte na desetiny cm.



5.1 Čtverec: $S_1 = 16\ \text{cm}^2 \Rightarrow a_1 = 4$ cm

Obdélník: $x = 16$ cm

$y = ?$ cm

$S_2 = 2{,}5 \cdot S_1$

$2{,}5 \cdot 16 = 16 \cdot y$

$y = 2{,}5$ cm

5.2 Obsah obdélníku:

$S_2 = x \cdot y$

$S_2 = 2{,}5 \cdot 16$

$S_2 = 40\ \text{cm}^2$

Celý obrazec: obdélník se stranami

$a = 4 \cdot 4 = 16$ cm,

$b = 4 \cdot 4 + 2{,}5 = 18{,}5$ cm

$S = a \cdot b$

$S = 16 \cdot 18{,}5$

$S = 296\ \text{cm}^2$

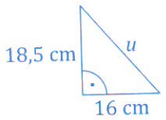
100 % ..... 296 cm²

x % ..... 40 cm²

$x = \frac{40}{296} \cdot 100$

$x = 13{,}5$ %

5.3



$u^2 = 16^2 + 18{,}5^2$

$u = \sqrt{598{,}25}$

$u = 24{,}5$ cm

Z obsahu jednoho čtverce vypočítáme délku jeho strany. Ze zadání dopočítáme obsah obdélníku.

5.1 Ze vzorce pro obsah obdélníku a znalosti jedné jeho strany spočítáme velikost druhé strany.

5.2 Mozaika má tvar obdélníku, jehož rozměry dopočítáme. Jeho obsah je 100 % a následně zjistíme, kolik procent z něj tvoří obsah malého obdélníku. Počet procent spočítáme např. trojčlenkou. Zaokrouhlíme dle zadání.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

5.3 Úhlopříčku vypočítáme pomocí Pythagorovy věty.

Je vhodné zapisovat si zadané i spočítané rozměry do obrázku.

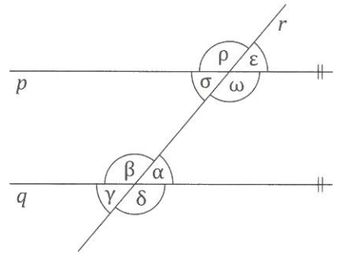
Pozor na správné sestavení Pythagorovy věty – viz příklad 1.

Pozor na správné zaokrouhlování výsledků!

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Na obrázku jsou zakresleny dvě rovnoběžné přímky p a q proťaté přímkou r.



1 **Přiřaďte ke každému pojmenování úhlů (1.1–1.4) odpovídající úhly (A–F).**

1.1 vedlejší k α .....

1.2 vrcholové k α .....

1.3 střídavé k α .....

1.4 souhlasné s α .....

A) jen ε

B) jen γ

C) γ a σ

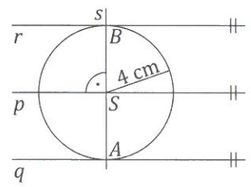
D) β a δ

E) jen σ

F) jen β

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

Na obrázku je zakreslena kružnice k s poloměrem 4 cm, její průměr AB a přímky r, p a q kolmé na AB. Přímka r prochází bodem B, přímka q bodem A a přímka p středem kružnice S.



2 **Přiřaďte správnou množinu bodů (2.1–2.4) dané vlastnosti k jejímu popisu (A–F).**

2.1 Množina všech bodů v rovině, které mají od přímky p vzdálenost 4 cm. .....

2.2 Množina všech bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost 4 cm. .....

2.3 Množina všech bodů v rovině, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem 90°. .....

2.4 Množina všech bodů v rovině, které mají od bodů A a B stejnou vzdálenost. .....

A) k

B) $k - \{A, B\}$

C) r a q

D) $\{A, B\}$

E) q

F) p

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

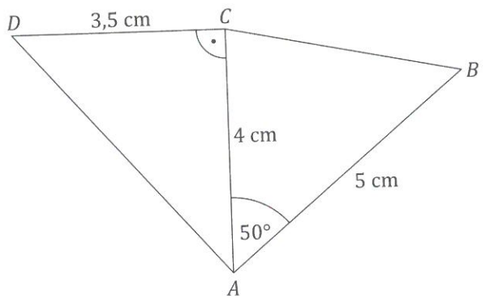
Lesní cesta svírá se silnicí úhel 53°, obě jsou v uvažovaném úseku přímé. Z jejich křižovatky vyjel po lesní cestě cyklista průměrnou rychlostí 18 km/h.

3 Jaká bude vzdálenost cyklisty od silnice po dvou minutách jízdy?
(Hodnotu zaokrouhlete na desítky metrů.)

A) 480 m
B) 510 m
C) 540 m
D) 570 m
E) 600 m

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí: $|AB| = 5$ cm, $|CD| = 3{,}5$ cm, $|AC| = 4$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 50°$, $|\sphericalangle ACD| = 90°$



4

4.1 Vypočtěte obsah trojúhelníku ACD. Uveďte celý postup řešení (použité vzorce, dosazení číselných hodnot, počet a jednotky).

4.2 Vypočtěte obsah trojúhelníku ACB. Výsledek zaokrouhlete na celé centimetry čtvereční. Uveďte celý pos řešení (použité vzorce, dosazení číselných hodnot, výpočet a jednotky).

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

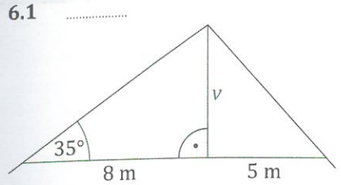
Silnice překonává potok mostem v nadmořské výšce 440 m a poté stoupá pod úhlem α na vrchol kopce v nadmořsl výšce 630 m. Silniční vzdálenost mezi mostem a vrcholem kopce je 2,1 km.

5 Jaký úhel svírá mezi mostem a vrcholem kopce silnice s vodorovnou rovinou? Výsledek je zaokrouhle celé stupně.

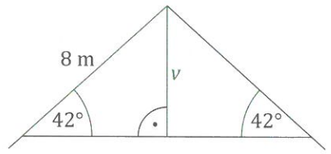
A) 5°
B) 6°
C) 7°
D) 8°
E) 9°

6 V každé zobrazené situaci je výška střechy rodinného domu znázorněna symbolem v. Přiřaďte ke každé situaci (6.1–6.3) odpovídající výšku v střechy (A–E).
(Výsledky jsou zaokrouhleny na desetiny metru.)

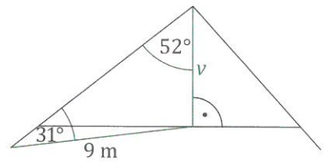
6.1 .....



6.2 .....



6.3 .....



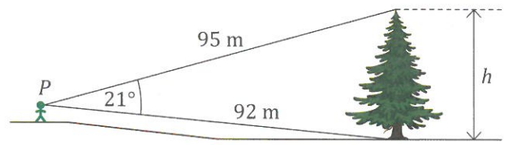
A) méně než 5,5 m
B) 5,6 m
C) 5,9 m
D) 6,1 m
E) 6,3 m

7 Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, strana a měří 6 cm. Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (7.1–7.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
7.1	Je-li $\alpha = 30°$, pak $c = 12$ cm.	☐	☐
7.2	Je-li $b = 4$ cm, pak $t_a = 5$ cm.	☐	☐
7.3	Je-li $b = 4$ cm, pak $c = 8$ cm.	☐	☐
7.4	Je-li $\beta = 50°$, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.	☐	☐

ÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Chceme změřit výšku smrku. Místo pozorování P je od paty kmene smrku vzdáleno 92 m, od vrcholu smrku 95 m. Z místa pozorování P se smrk od paty kmene po jeho vrchol jeví v zorném úhlu 21°.



8 Jaká je výška smrku h? Výsledek je zaokrouhlen na celé metry.

A) 21 m
B) 25 m
C) 30 m
D) 34 m
E) 39 m

ÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Na plánu města v měřítku 1 : 7 500 je zakresleno arboretum jako obdélník o obsahu 3,84 cm², jehož jedna strana je o polovinu delší než druhá.

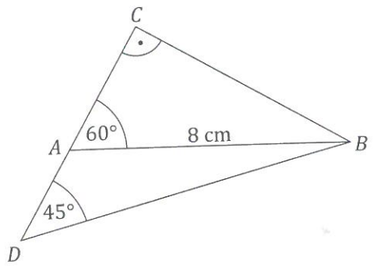
9

9.1 Vypočtěte skutečnou rozlohu arboreta. Výsledek uveďte v ha (nezaokrouhlujte).

9.2 Vypočtěte, jaká je skutečná délka arboreta (delší strana obdélníku).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Úsečka AB rozděluje trojúhelník BCD na dva trojúhelníky ABC a ADB. Platí: $|AB| = 8$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 60°$, $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|\sphericalangle ADB| = 45°$.



10 V jakém poměru jsou délky úseček BD a AC?

A) $2 : 1$
B) $\sqrt{5} : 1$
C) $\sqrt{6} : 1$
D) $\sqrt{8} : 1$
E) $3 : 1$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

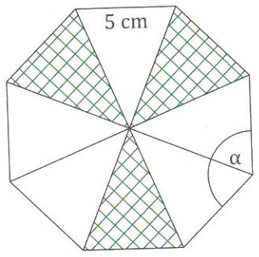
Střední příčky trojúhelníku ABC mají délky 3 cm, 3 cm a 3,5 cm.

11 Jaký je obsah trojúhelníku ABC? Hodnoty jsou zaokrouhleny na celé cm².

A) 17 cm²
B) 19 cm²
C) 21 cm²
D) 25 cm²
E) 32 cm²

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Záhon má tvar pravidelného osmiúhelníku o straně 5 m. Na vyšrafované ploše budou růst růže, na bílé ploše tulipány.



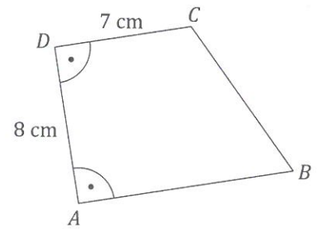
12

12.1 Vypočtěte velikost úhlu α.

12.2 Vypočtěte obsah plochy, na které budou růst růže. Výsledek zaokrouhlete na celé m².

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Na obrázku je zakreslen čtyřúhelník $ABCD$, jehož obsah je 72 cm².

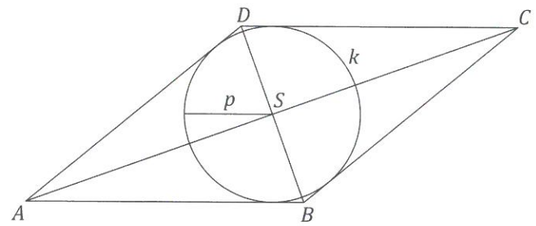


13 Jakou délku má strana AB?

A) 9 cm
B) 10 cm
C) 12 cm
D) 14 cm
E) jinou délku

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Poloměr p kružnice k vepsané kosočtverci $ABCD$ je 3,5 cm. Úhlopříčka AC měří 20,70 cm, úhlopříčka BD měří 7,44 cm.



14 Jaká je délka strany kosočtverce $ABCD$?
(Výsledek zaokrouhlete na desetiny cm.)

A) 11,0 cm
B) 11,5 cm
C) 12,0 cm
D) 12,5 cm
E) 12,9 cm

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Zahrada má tvar obdélníku, jehož jedna strana měří 35 m a druhá strana je o 7 m kratší než úhlopříčka obdélníku.

15 Vypočtěte obsah zahrady v m².

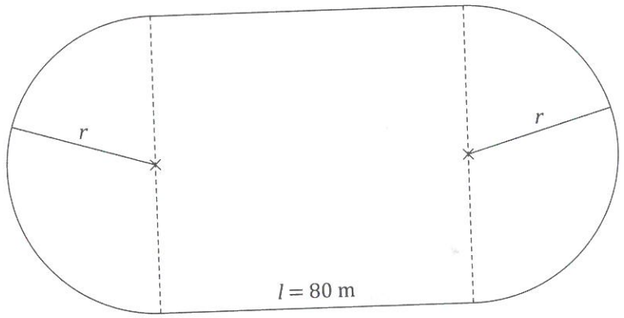
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je $\gamma = 121°$, $\alpha = \frac{2}{3}\delta$, kde α je úhel při vrcholu A, β úhel při vrcholu B, γ úhel při vrcholu C, δ úhel při vrcholu D.

16 Vypočtěte rozdíl velikostí úhlů α a β.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Standardní délka běžeckého oválu je 400 m. Ovál se skládá ze dvou úseček o délce 80 m a dvou zatáček tvaru půlkružnice o poloměru r.

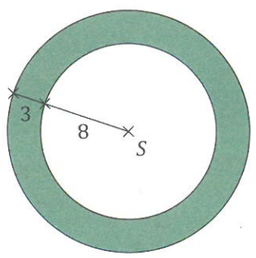


17 Vypočtěte poloměr r zatáček.
(Výsledek zaokrouhlete na celé metry.)

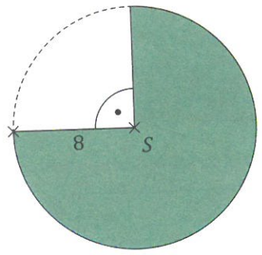
---

18 Přiřaďte ke každému obrázku (18.1–18.3) obsah vybarvené plochy (A–E).

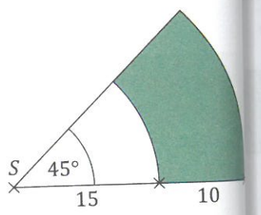
18.1 .....



18.2 .....



18.3 .....



A) 40π
B) 45π
C) 48π
D) 50π
E) 57π

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

Oběžnou dráhu Měsíce kolem Slunce můžeme s mírným zjednodušením považovat za kružnici o poloměru 384 400 k
Doba oběhu Měsíce kolem Země vzhledem ke vzdáleným hvězdám činí 27,3 dne.

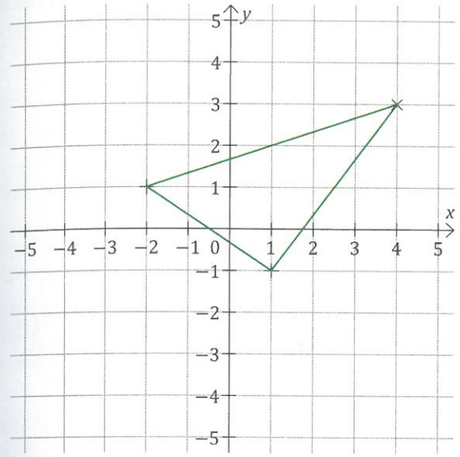
19 Jakou dráhu urazí Měsíc na své oběžné dráze kolem Země za jeden den?
(Výsledek zaokrouhlete na tisíce kilometrů.)

A) 11 000 km
B) 14 000 km
C) 42 000 km
D) 66 000 km
E) 88 000 km

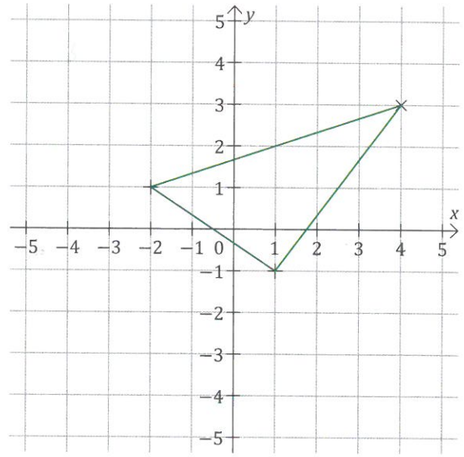
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZKY K ÚLOZE 20

V pravoúhlé síti jsou v mřížových bodech umístěny vrcholy trojúhelníku ABC, $A[-2; 1]$, $B[1; -1]$, $C[4; 3]$.

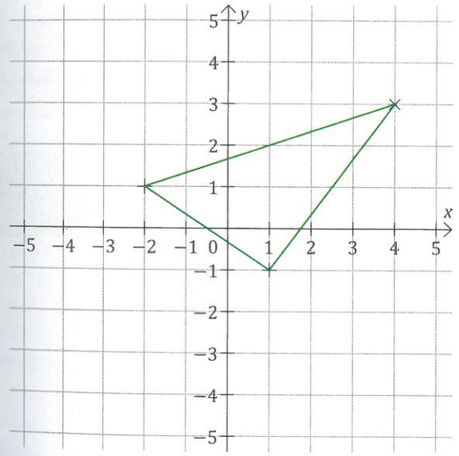
20.1



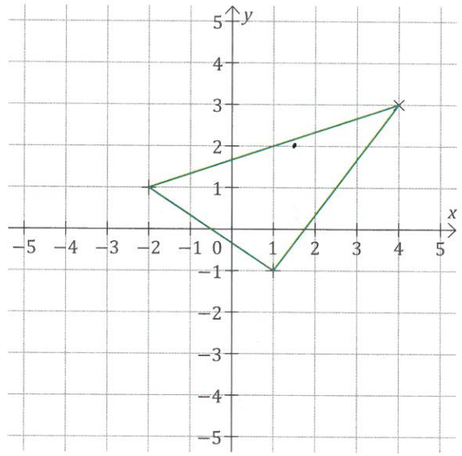
20.2



20.3



20.4



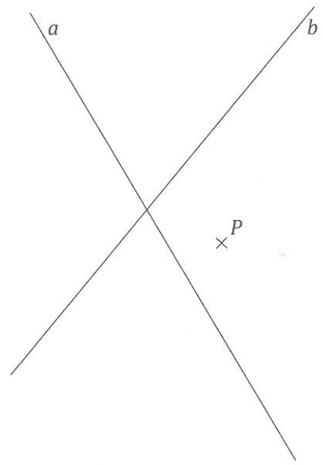
20 Přiřaďte k trojúhelníkům $A'B'C'$ (20.1–20.4) zadaným souřadnicemi jejich vrcholů odpovídající zobrazení (A–F), ve kterém jsou obrazem trojúhelníku ABC.
(Trojúhelníky můžete nakreslit do příslušných obrázků.)

20.1 $A'[1; 4]$, $B'[-1; 1]$, $C'[3; -2]$ .....
20.2 $A'[2; -1]$, $B'[-1; 1]$, $C'[-4; -3]$ .....
20.3 $A'[4; 1]$, $B'[1; -1]$, $C'[-2; 3]$ .....
20.4 $A'[-4; 2]$, $B'[-1; 0]$, $C'[2; 4]$ .....

A) osová souměrnost podle přímky $x = 1$
B) osová souměrnost podle osy y
C) středová souměrnost podle středu $T[0; 0]$
D) posunutí o vektor $u = (-2; 1)$
E) posunutí o vektor $v = (3; 3)$
F) otočení se středem $S[1; 1]$ o úhel 90° v záporném smyslu

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

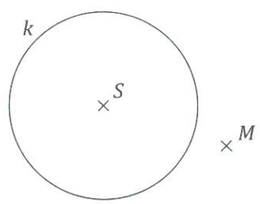
Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod P, který neleží ani na jedné z nich. Bodem P veďte přímku p, která svírá s oběma různoběžkami stejné úhly.



21 Proveďte rozbor nebo zápis konstrukce, konstrukci a diskusi.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Je dána kružnice k se středem S a bod M, který leží vně kružnice k. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky 7 cm, pro nějž je kružnice k vepsaná a bod M leží na jeho základně AB.



22 Proveďte rozbor nebo zápis konstrukce, konstrukci a diskusi.