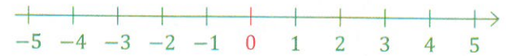
ANALYTICKÁ GEOMETRIE

ČÍSELNÁ OSA

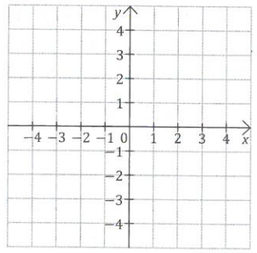
- přímka, pomocí které znázorňujeme množinu reálných čísel
- počátek 0 dělí číselnou osu na kladnou a zápornou poloosu, bod 1 určuje jednotku



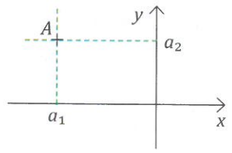
- **souřadnice bodu na číselné ose**
  - bodu A přiřazujeme souřadnici a_1 (zapisujeme $A\,[a_1]$), pro kterou platí: $|a_1|$ je rovna vzdálenosti bodu A od počátku číselné osy a $a_1 > 0$, jestliže bod A leží na kladné poloose, a $a_1 < 0$, jestliže bod A leží na záporné poloose
- **vzdálenost dvou bodů na přímce**
  - mají-li body A a B souřadnice $A\,[a_1]$ a $B\,[b_1]$, délka úsečky AB je rovna absolutní hodnotě rozdílu souřadnic bodů A a B: $|AB| = |a_1 - b_1|$

KARTÉZSKÁ SOUŘADNICOVÁ SOUSTAVA *Oxy*

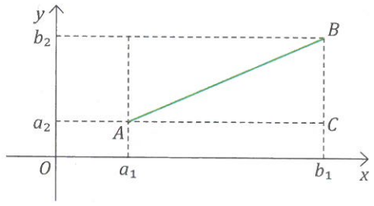
- tvořena dvěma číselnými osami x a y, které jsou navzájem kolmé, bod O odpovídá na obou osách jejich počátku



- bod O se nazývá počátek souřadnicové soustavy a osy x a y souřadnicové osy
- **souřadnice bodu v rovině**
  - bodu A přiřazujeme dvě souřadnice (značíme $A\,[a_1; a_2]$): bodem A vedeme rovnoběžky se souřadnicovými osami, a_1 je souřadnice, kterou čteme na ose x v průsečíku rovnoběžky vedené bodem A s osou y, a_2 je souřadnice, kterou čteme na ose y v průsečíku rovnoběžky vedené bodem A s osou x

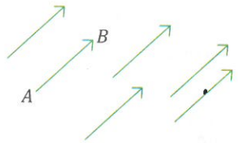


- **vzdálenost bodů v rovině**
  - mají-li body A a B souřadnice $A\,[a_1; a_2]$ a $B\,[b_1; b_2]$, pro délku úsečky AB platí:
    $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
- **souřadnice středu úsečky**
  - jsou rovny aritmetickému průměru souřadnic krajních bodů úsečky

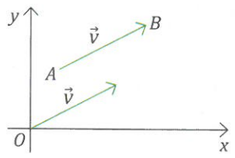


VEKTORY

- vektorem $\vec{v} = B - A$ rozumíme množinu všech orientovaných úseček, které jsou s orientovanou úsečkou AB rovnoběžné a souhlasně orientované a mají stejnou velikost; každou z těchto úseček nazýváme umístěním vektoru $\vec{v}$



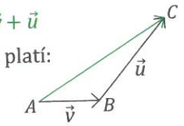
- speciálním případem je nulový vektor, značíme ho 0, jehož počáteční i koncový bod splývají (nejde tedy o úsečku, ale o jediný bod)
- **rovnoběžnost vektorů**
  - dva vektory nazýváme rovnoběžné (kolineární), jsou-li rovnoběžná jejich libovolná umístění
- **souřadnice vektoru**
  - souřadnice koncového bodu vektoru, který má počáteční bod umístěn v počátku souřadnicové soustavy
  - je-li $A\,[a_1]$ a $B\,[b_1]$, má vektor $\vec{v} = B - A$ souřadnici $\vec{v} = (b_1 - a_1)$
  - je-li $A\,[a_1; a_2]$ a $B\,[b_1; b_2]$, má vektor $\vec{v} = B - A$ souřadnice $\vec{v} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$



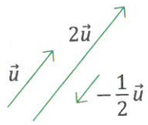
- **velikost vektoru**
  - je velikost jeho libovolného umístění
  - v rovině platí:
    $|\vec{v}| = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

OPERACE S VEKTORY

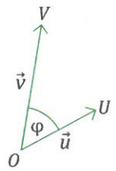
- **součet vektorů**
  - vektor $\overrightarrow{AC}$ nazýváme součtem $\vec{v} + \vec{u}$
  - pro souřadnice součtu vektorů platí: $\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1; v_2 + u_2)$



- **opačný vektor k vektoru $\vec{v}$**
  - $-\vec{v} = (-v_1; -v_2)$, má stejnou velikost jako vektor $\vec{v}$, je s ním rovnoběžný, má opačnou orientaci
- **odečíst od vektoru $\vec{u}$ vektor $\vec{v}$** znamená přičíst k vektoru $\vec{u}$ vektor $-\vec{v}$
- **násobení vektoru číslem**
  - součin $k \cdot \vec{u}$ je vektor $\vec{w}$ rovnoběžný s vektorem $\vec{u}$, pro který platí:
    1. $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{u}|$
    2. je-li $|\vec{u}| \neq 0 \wedge k \neq 0$, jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{w}$ souhlasně rovnoběžné pro k kladné a nesouhlasně rovnoběžné pro k záporné
    3. je-li $|\vec{u}| = 0 \vee k = 0$, je $\vec{w} = \vec{0}$ (nulový vektor, vektor o velikosti 0)



  - pro souřadnice vektoru $k \cdot \vec{u}$ platí: $k \cdot \vec{u} = (ku_1; ku_2)$
- **skalární součin dvou vektorů** $\vec{u} = (u_1; u_2)$ **a** $\vec{v} = (v_1; v_2)$
  - číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$
- **úhel dvou vektorů**
  - mají-li dva nenulové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ umístění $\overrightarrow{OU}$ a $\overrightarrow{OV}$, nazývá se konvexní úhel UOV úhlem vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$
  - jsou-li přímky OU a OV kolmé, nazýváme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ též navzájem kolmými

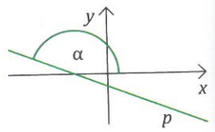


  - pro úhel vektorů platí: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
  - dva nenulové vektory jsou navzájem kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule

ROVNICE PŘÍMKY V ROVINĚ

- **Parametrické vyjádření přímky:**
  - přímka p je určena bodem $A\,[a_1; a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1; s_2)$ (tj. vektorem, který lze na přímku p umístit, je s přímkou p rovnoběžný)
  - bod X leží na přímce p právě tehdy, když jsou vektory $\vec{s}$ a $X - A$ rovnoběžné, tedy $X\,[x, y] \in p \Leftrightarrow (X - A) = t \cdot \vec{s}$, kde $t \in \mathbb{R}$

  - rozepsáním této vektorové rovnice pro jednotlivé souřadnice dostaneme parametrické vyjádření přímky p: $x = a_1 + ts_1, y = a_2 + ts_2, t \in \mathbb{R}$
- **Obecná rovnice přímky** p: $ax + by + c = 0$
  - rovnice, které musí vyhovovat souřadnice bodu $X\,[x, y]$, aby tento bod ležel na přímce p
  - z rovnice lze přečíst: $\vec{n} = (a; b)$ jsou souřadnice normálového vektoru přímky p; normálový vektor přímky je kolmý k přímce p, a tedy i ke směrovému vektoru přímky p; $\vec{s} = (-b; a)$ jsou souřadnice směrového vektoru přímky p
  - speciální případy:
    - p: $y + c = 0$, tj. přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x
    - p: $x + c = 0$, tj. přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou y
    - p: $ax + by = 0$, tj. přímka prochází počátkem souřadnicové soustavy
- **Směrnicová rovnice přímky**
  - pro přímky, které nejsou rovnoběžné se souřadnicovou osou y, lze rovnici upravit na tvar p: $y = kx + q$, kde k je směrnice přímky p, platí $k = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel, který svírá přímka p s kladnou x-ovou poloosou, q je y-ová souřadnice průsečíku přímky p se souřadnicovou osou y



POLOHA PŘÍMKY V ROVINĚ

- **Vzájemná poloha dvou přímek v rovině:**

	Počet společných bodů	Směrové vektory
různoběžky	1	různoběžné
různé rovnoběžky	0	rovnoběžné
totožné rovnoběžky	nekonečně mnoho	rovnoběžné

- **odchylka dvou přímek**
  - pro odchylku $\varphi\left(0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ dvou přímek p a q v rovině platí vztah $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, kde $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$ jsou směrové vektory přímek p a q
- **vzdálenost bodu od přímky v rovině**
  - vzdálenost bodu $A\,[a_1; a_2]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je dána vztahem $d = \dfrac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- **vzdálenost dvou rovnoběžek**
  - rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné přímky od druhé

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

1 **Jsou dány body $A\,[2; 1]$ a $B\,[26; 10]$. Na úsečce AB leží bod C tak, že $|AC| : |CB| = 1 : 2$. Určete souřadnice bodu C.**

Hledáme bod $C\,[c_1; c_2]$.

$\vec{v} = B - A = (24; 9)$, $\vec{u} = C - A = (c_1 - 2; c_2 - 1)$

$|AC| : |CB| = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 3\vec{u}$

$24 = 3 \cdot (c_1 - 2) \quad \wedge \quad 9 = 3 \cdot (c_2 - 1)$

$c_1 = 10, c_2 = 4, C\,[10; 4]$

1 **Bod $M\left[\frac{5}{2}; 1\right]$ dělí úsečku AB v poměru $1 : 1$. Bod B má souřadnice $B\left[\frac{3}{2}; -2\right]$. Určete souřadnice bodu A.**

2 **Body $A\,[-6; 2]$ a $B\,[2; 4]$ jsou vrcholy rovnoběžníku $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v počátku souřadnicové soustavy. Určete souřadnice vrcholů C a D.**

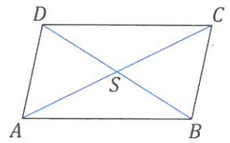
S je střed úsečky AC, tedy:

$S\left[\dfrac{a_1 + c_1}{2}; \dfrac{a_2 + c_2}{2}\right]$

$0 = \dfrac{-6 + c_1}{2} \wedge 0 = \dfrac{2 + c_2}{2}$

$c_1 = 6, c_2 = -2, C\,[6; -2]$

Analogicky: $D\,[-2; -4]$



2 **Jsou dány body $A\,[1; 4]$, $B\,[3; -5]$, $C\,[-6; -8]$. Určete souřadnice bodu D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl rovnoběžník.**

3 **Zapište obecnou rovnici přímky, která prochází body $A\,[2; 5]$ a $B\,[6; -2]$.**

Směrový vektor hledané přímky .... $B - A = (4; -7)$

Normálový vektor hledané přímky... $\vec{n} = (7; 4)$

$\overleftrightarrow{AB}$: $7x + 4y + c = 0$

$A \in \overleftrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -34$

$\overleftrightarrow{AB}$: $7x + 4y - 34 = 0$

3 **Jsou dány body $A\,[6; 5]$ a $B\,[2; -3]$. Zapište obecnou rovnici osy úsečky AB.**

4 **Vypočtěte velikost výšky na stranu a v trojúhelníku ABC, $A\,[3; 3]$, $B\,[5; 5]$, $C\,[7; 1]$.**

Zapíšeme obecnou rovnici přímky BC:

$C - B = (2; -4)$ je směrový vektor hledané přímky, normálový je tedy $(4; 2)$ nebo také $(2; 1)$.

$\overleftrightarrow{BC}$: $2x + y + c = 0$

$B \in \overleftrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad 10 + 5 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -15$

$\overleftrightarrow{BC}$: $2x + y - 15 = 0$

Velikost výšky na stranu a je rovna vzdálenosti bodu A od přímky BC:

$v_a = |A; \overleftrightarrow{BC}| = \dfrac{|2x_A + y_A - 15|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

4 **Určete reálné číslo c tak, aby vzdálenost počátku souřadnicové soustavy od přímky p: $x + y + c = 0$ byla rovna pěti.**

5 **Najděte průsečík přímek** p: $y = 3x + 2$ **a** q: $2x - 3y + 4 = 0$ **a určete velikost úhlu, který přímky** p **a** q **svírají.**

$M \in p \cap q$: $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$

Řešením soustavy rovnic dostaneme $x = -\frac{2}{7}; y = \frac{8}{7}$.

$M\left[-\frac{2}{7}; \frac{8}{7}\right]$

Směrové vektory daných přímek jsou $\vec{s_p} = (1; 3)$, $\vec{s_q} = (3; 2)$.

$\cos\alpha = \frac{|\vec{s_p} \cdot \vec{s_q}|}{|\vec{s_p}| \cdot |\vec{s_q}|} = \frac{3 + 6}{\sqrt{1 + 9} \cdot \sqrt{9 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$

$\alpha \doteq 37° 52'$

5 **Najděte průsečík přímek** p: $y = 3x + 5$ **a** q: $6x - 2y - 13 = 0$ **a určete velikost úhlu, který přímky** p **a** q **svírají.**

6 **Přímka** p **prochází body** $A\,[3; 0]$ **a** $B\,[4; 2]$**. Určete velikost úhlu, který přímka** p **svírá s osou** x**.**

Zapíšeme směrnicovou rovnici přímky p:

p: $y = kx + q$

$A \in p \quad \Rightarrow \quad 0 = 3k + q$

$B \in p \quad \Rightarrow \quad 2 = 4k + q$

Řešením soustavy rovnic dostaneme $k = 2, q = -6$.

p: $y = 2x - 6$

Směrnice k udává tangens hledaného úhlu:

$\operatorname{tg}\alpha = 2, \alpha \doteq 63° 26'$

6 **Určete velikost úhlu, který přímka** p: $3x - 4y + 10 = 0$ **svírá s osou** x**.**

7 **Napište obecnou rovnici přímky** m**, která prochází průsečíkem přímek** p: $x = t, y = -3 + t, t \in \mathbb{R}$ **a** q: $2x + 3y - 11 = 0$ **a je rovnoběžná s přímkou** r: $5x - 4y - 20 = 0$**.**

$x = t$

$y = -3 + t$

$2x + 3y - 11 = 0$

Najdeme průsečík P přímek p a q.

$t = 4, x = 4, y = 1, P\,[4; 1]$

Přímka m bude mít rovnici m: $5x - 4y + c = 0$ (má stejný normálový vektor $(5; -4)$ jako přímka r).

$P\,[4; 1] \in m \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + c = 0$

$c = -16$

m: $5x - 4y - 16 = 0$

7 **Napište obecnou rovnici přímky** m**, která prochází průsečíkem přímek** p: $x = 5 - 2t, y = -3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ **a** q: $3x + 4y - 3 = 0$ **a je rovnoběžná se souřadnicovou osou** x**.**

8 **Jsou dány vektory** $\vec{u} = (3; -1)$ **a** $\vec{v} = (-2; m)$**. Určete reálné číslo** m **tak, aby skalární součin** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$**.**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 \cdot u_2v_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - m$

$3 = -6 - m$

$m = -9$

8 **Jsou dány vektory** $\vec{u} = (-1; 7)$ **a** $\vec{v} = (k; 4)$**. Určete reálné číslo** k **tak, aby vektory** $\vec{u}$ **a** $\vec{v}$ **byly navzájem kolmé.**

NEJČASTĚJŠÍ CHYBY U MATURITNÍ ZKOUŠKY

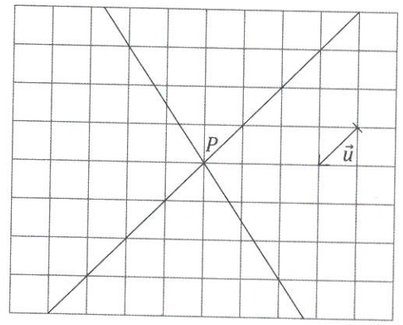
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je umístěn vektor $\vec{u}$ a dvě neoznačené přímky p a q, které se protínají v průsečíku P.

$\vec{u} = (-1; -1)$

p: $y = x + 2$

q: $3x + 2y + 1 = 0$



1 MZ 2021

1.1 Vypočtěte obě souřadnice průsečíku $Q\,[x; y]$ přímky q se souřadnicovou osou x.

1.2 Vypočtěte obě souřadnice průsečíku $P\,[p_1; p_2]$ přímek p, q.

1.3 V obrázku narýsujte souřadnicové osy x, y a popište počátek O soustavy souřadnic.

1.1 p: $y = x + 2 \quad \Rightarrow$ roustoucí

q: $y = \frac{-3x - 1}{2} = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ klesající

$Q\,[x; 0]$

q: $0 = \frac{-3x - 1}{2}$

$0 = -3x - 1$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

$Q\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$

1.2 $x + 2 = \frac{-3x - 1}{2}$

$2x + 4 = -3x - 1$

$5x = -5$

$x = -1$

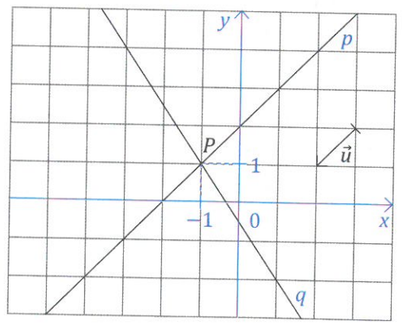
$y = x + 2$

$y = -1 + 2$

$y = 1$

$P\,[-1; 1]$

1.3 viz graf



Nejprve určíme, která z přímek na obrázku představuje přímku p a která přímku q. Z předpisů přímek určíme, která je rostoucí a která klesající.

Rovnici přímky q převedeme na obecný tvar předpisu funkce $y = ax + b$ $\left(\text{v našem případě tedy } y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)$. Pokud $a > 0$, je přímka rostoucí, a pokud $a < 0$, je přímka klesající. V našem případě je $a = -\frac{3}{2}$, přímka je tedy klesající.

Je-li bod Q průsečík přímky se souřadnicovou osou x, leží na této ose. Jeho y-nová souřadnice je tedy nulová. Do rovnice přímky q dosadíme tedy $y = 0$ a dopočítáme x-ovou souřadnici bodu Q.

Průsečík P přímek p a q vypočítáme soustavou rovnic – hledáme bod, který leží na obou přímkách.

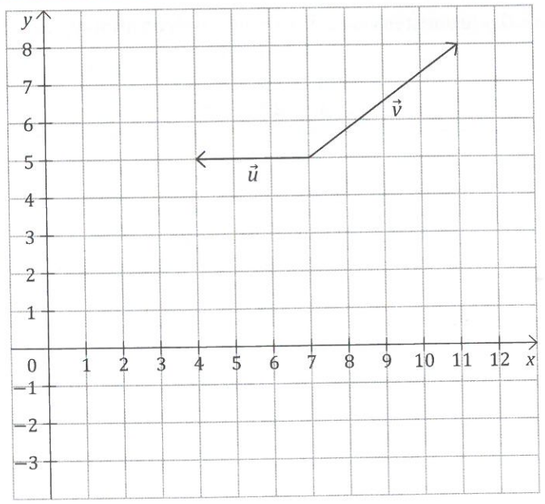
Ze znalosti souřadnic bodu P a vektoru $\vec{u}$ narýsujeme do obrázku soustavu souřadnic.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

Pozor! Při počítání souřadnic průsečíku přímky a a osy x musíme zvolit $y = 0$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou umístěny vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Počáteční i koncové body těchto vektorů jsou v mřížových bodech.



2 MZ 2021

2.1 Pro vektor $\vec{a} = (a_1; -2)$ platí: $\vec{a} \cdot \vec{u} = 4$. Vypočtěte chybějící souřadnici a_1 vektoru $\vec{a}$.

2.2 Zakreslete vektor $\vec{b} = \vec{v} + \vec{u}$ tak, aby bod O byl počátečním bodem jeho umístění v kartézské soustavě souřadnic Oxy.

2.3 Zakreslete vektor $\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}$ tak, aby bod $C\,[5; -3]$ byl počátečním bodem jeho umístění v kartézské soustavě souřadnic Oxy.

$\vec{u} = (-3; 0)$; $\vec{v} = (4; 3)$

2.1 $\vec{a} = (a_1; -2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 4$$
$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 = 4$$
$$a_1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 = 4$$
$$-3a_1 = 4$$
$$a_1 = -\frac{4}{3}$$

2.2 $\vec{b} = \vec{v} + \vec{u}$

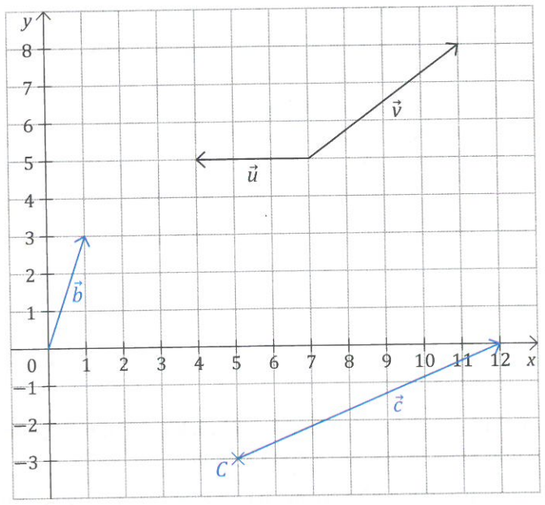
$\vec{b} = (-3 + 4; 0 + 3)$

$\vec{b} = (1; 3)$

2.3 $\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}$ $\quad C\,[5; -3]$

$\vec{c} = (4 - (-3); 3 - 0)$

$\vec{c} = (7; 3)$



Nejprve si vypíšeme souřadnice zadaných vektorů – porovnáme jejich počáteční a koncový bod. Buď početně, nebo jen náhledem zjistíme „posun" (doplnění na rovnoběžník) ve směru jednotlivých os.

Jde o skalární součin dvou vektorů: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. Dosadíme známé hodnoty a dopočítáme.

Rozdíl a součet vektorů: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$, $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$. Dosadíme známe hodnoty a dopočítáme. Počáteční bod vektoru zvolíme dle zadání a zakreslíme konečný bod („posunem" tohoto bodu podle souřadnic vektoru ve směru osy x a ve směru osy y).

Pozor na pořadí souřadnic při výpočtech.

Pozor na správné určení souřadnic.

Pozor na počáteční bod vektoru c, který je v bodě C.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

V rovině jsou dány body $A\,[-15; 10]$, $S\,[2; 12]$ a $M\,[-6; 10]$. Bod S je střed úsečky AB.

3 **Jaká je vzdálenost bodů B a M?** MZ 2019

A) $\sqrt{557}$

B) 10

C) $\sqrt{641}$

D) 12

E) 4,5

A $[-15; 10]$

S $[2; 12]$

M $[-6; 10]$

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right]$$

$$2 = \frac{-15 + b_1}{2} \qquad 12 = \frac{10 + b_2}{2}$$
$$4 = -15 + b_1 \qquad 24 = 10 + b_2$$
$$b_1 = 19 \qquad b_2 = 14$$

$B\,[19; 14]$

$$|MB| = \sqrt{(b_1 - m_1)^2 + (b_2 - m_2)^2}$$
$$|MB| = \sqrt{[19 - (-6)]^2 + (14 - 10)^2} = \sqrt{641}$$

možnost C)

Nejprve určíme souřadnice bodu B. Známe střed S úsečky AB, dosadíme ho proto do vztahu pro výpočet středu úsečky a dopočítáme souřadnice bodu B:

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right]$$

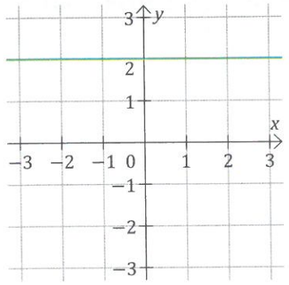
Vypočítáme vzdálenost bodů BM podle vzorce: $|MB| = \sqrt{(m_1 - b_1)^2 + (m_2 - b_2)^2}$

Pozor na správné dosazení záporných souřadnic bodů do vzorců!

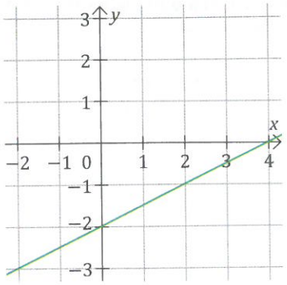
4 Přiřaďte ke každé přímce (4.1–4.4) její analytické vyjádření (A–F).

MZ 2019

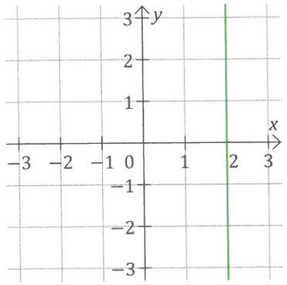
4.1



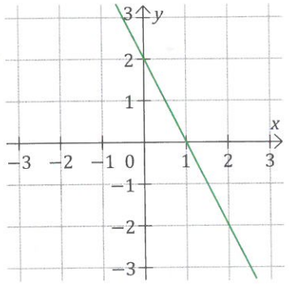
4.2



4.3



4.4



A) $y = 2x - 1$

B) $x = 2$

C) $x = 1 + t$
$y = -2t;\ t \in \mathbb{R}$

D) $x = -1 + t$
$y = 2t;\ t \in \mathbb{R}$

E) $x = t + 2$
$y = 2;\ t \in \mathbb{R}$

F) $x - 2y - 4 = 0$

4.1 $y = 2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$
$y = 2$
možnost E)

4.2 $A\,[0; -2],\ B\,[4; 0]$
$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (4 - 0; 0 + 2) = (4; 2) = (2; 1)$
$\vec{n} = (1; -2)$
možnost F)

4.3 $x = 2$
možnost B)

4.4 $A\,[1; 0],\ B\,[0; 2]$
$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (0 - 1; 2 - 0) = (-1; 2)$
$\vec{n} = (2; 1)$
možnost C)

A $y = 2x - 1$
$0 = 2x - y - 1$
$\vec{n} = (2; -1)$ ×

C $\vec{s} = (1; -2)$
$\vec{n} = (2; 1)$
4.4

D $\vec{s} = (1; 2)$ ×

F $\vec{n} = (1; -2)$
4.2

Z grafů přečteme směrové vektory přímek (popř. je převedeme na normálové).

Ze zápisů přímek A–F vypíšeme směrové (popř. normálové) vektory a porovnáme.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

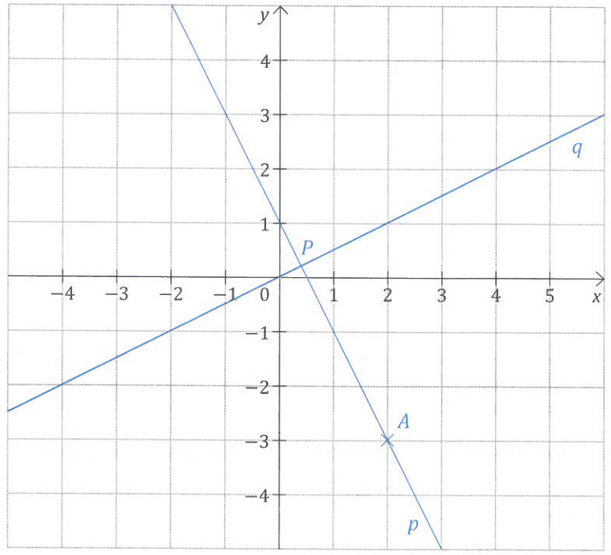
Přímka na obrázku 4.1 je rovnoběžná s osou x v bodě $y = 2$. Její předpis je tedy $y = 2$ (x je libovolné číslo).

Přímka na obrázku 4.3 je rovnoběžná s osou y v bodě $x = 2$. Její předpis je tedy $x = 2$.

Pozor na rozlišení směrových a normálových vektorů! Z obecné rovnice přímky přečteme směrový vektor (koeficient parametru t), z obecné rovnice přečteme normálový vektor (koeficienty proměnných x a y).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Je dána přímka p: $x = 2 + t$
$y = -3 - 2t;\ t \in \mathbb{R}$
Přímka q je kolmá k přímce p a prochází bodem O.



5

MZ 2020 2021

5.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte přímku q.

5.2 Vypočtěte souřadnice průsečíku $P\,[p_1; p_2]$ přímek p, q.

5.1 $A\,[2; -3],\ \vec{s_p} = (1; -2)$; viz graf

5.2 p: $x = 2 + t$
$y = -3 - 2t \quad t \in \mathbb{R}$
$\vec{s_p} = (1; -2) = \vec{n_q}$

q: $ax + by + c = 0$
$x - 2y + c = 0$
O: $0 + c = 0$
$c = 0 \Rightarrow q: x - 2y = 0$

$p \cap q$: $(2 + t) - 2(-3 - 2t) = 0$
$2 + t + 6 + 4t = 0$
$5t = -8$
$t = -\frac{8}{5}$

P: $x = 2 + t = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$
$y = -3 - 2t = -3 - 2 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{1}{5}$
$P\left[\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right]$

Zakreslíme přímku p. K tomu musíme znát dva její body (popř. jeden bod a směrový vektor). Obojí získáme z rovnice.

Zakreslíme přímku q podle zadání.

Abychom našli průsečík přímek, musíme znát rovnice obou. Pak příklad řešíme jako soustavu rovnic – hledáme bod, který leží na obou z nich.

Rovnici přímky q získáme pomocí jejího normálového vektoru a bodu, který na ní leží.

Přímky jsou na sebe kolmé. To znamená, že směrový vektor jedné z nich je zároveň normálový vektor té druhé.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

Z parametrické rovnice přímky zjistíme bod a směrový vektor. Do obecné rovnice dosazujeme vektor normálový. Tyto vektory jsou na sebe kolmé.

Soustavu rovnic řešíme jakoukoli metodou. V tomto případě je nejjednodušší dosazovací metoda.

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Je dána přímka p: $3x - 4y + 2 = 0$.

1 Který z vektorů nemůže být směrovým vektorem přímky p?

A) $\vec{a} = (4; 3)$
B) $\vec{b} = (-8; -6)$
C) $\vec{c} = (3; -4)$
D) $\vec{d} = (-4; -3)$
E) $\vec{e} = (12; 9)$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Jsou dány přímky p: $2x - 5y + 1 = 0$, q: $5x - 2y + 1 = 0$, r: $-2x + 5y - 1 = 0$.

2 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (2.1–2.3), je-li pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
2.1	Přímky p a q jsou kolmé.	☐	☐
2.2	Přímky q a r jsou rovnoběžné.	☐	☐
2.3	Přímky p a r jsou shodné.	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOHÁM 3–5

Jsou dány body $A\,[1; -4]$ a $B\,[5; 0]$. Bodem A prochází přímka p: $3x - y - 7 = 0$.

3 Napište rovnici přímky q procházející bodem B, která je rovnoběžná s přímkou p.

4 Napište rovnici přímky r procházející bodem A, která je kolmá na přímku p.

5 Napište rovnici osy úsečky AB.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Jsou dány body $A\,[1; 2]$, $B\,[5; 5]$, $C\,[2; 9]$ a $D\,[-2; 6]$, které tvoří vrcholy čtverce.

6 Na které přímce leží úhlopříčka čtverce?

A) $x = 1 + 4t$
$y = 2 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$

B) $4x + 3y - 35 = 0$

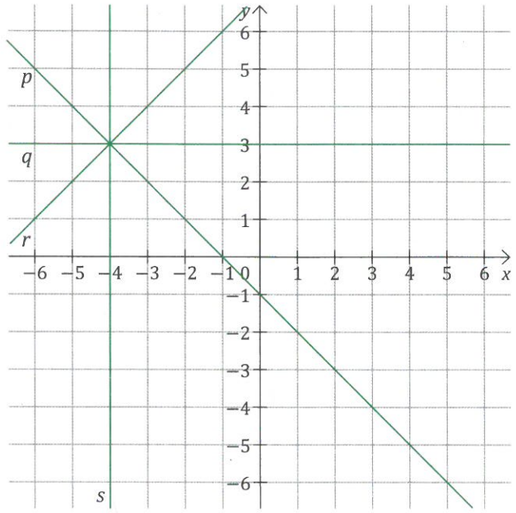
C) $x = 2 - 4t$
$y = 9 - 3t;\ t \in \mathbb{R}$

D) $7x - y - 5 = 0$

E) $x = -2 + 3t$
$y = 6 - 4t;\ t \in \mathbb{R}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Na obrázku jsou znázorněny přímky p, q, r a s.



7 Přiřaďte ke každé přímce (7.1–7.4) příslušnou obecnou rovnici (A–F).

7.1 p: .....
7.2 q: .....
7.3 r: .....
7.4 s: .....

A) $x + 4 = 0$
B) $y - 3 = 0$
C) $-4x + 3y = 0$
D) $x + 3y - 1 = 0$
E) $x - y + 7 = 0$
F) $x + y + 1 = 0$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

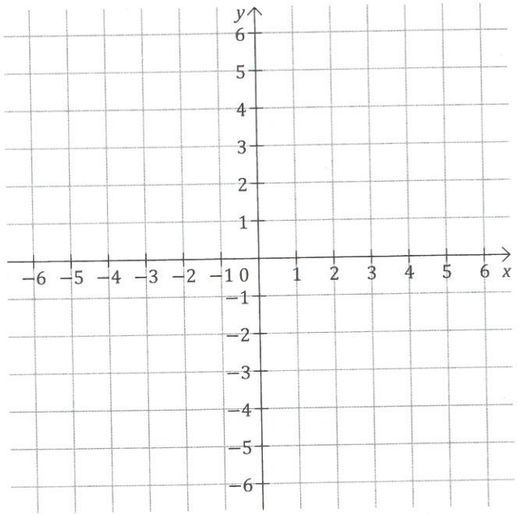
Jsou dány body $A\,[1; 3]$ a $B\,[-1; 2]$.

8 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (8.1–8.3), je-li pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
8.1	Bod A je koncový bod vektoru $\overrightarrow{BA} = (-2; -1)$.	☐	☐
8.2	Bod A je počáteční bod vektoru $\overrightarrow{AB} = (0; -1)$.	☐	☐
8.3	$3 \cdot \overrightarrow{AB} = (-6; -3)$	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 9–11

Je dán bod $A\,[-1; -1]$ a vektory $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ a $\overrightarrow{AC} = (3; 4)$.



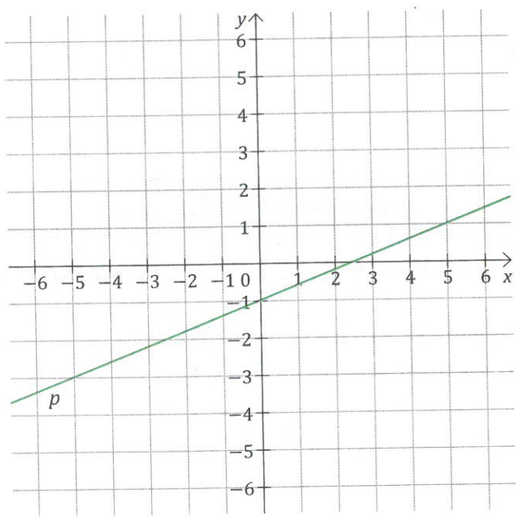
9 **Znázorněte do obrázku trojúhelník ABC.**

10 **Vypočtěte velikosti stran trojúhelníku ABC.**

11 **Vypočtěte velikost úhlu CAB.**
(Výsledek zaokrouhlete na celé stupně.)

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

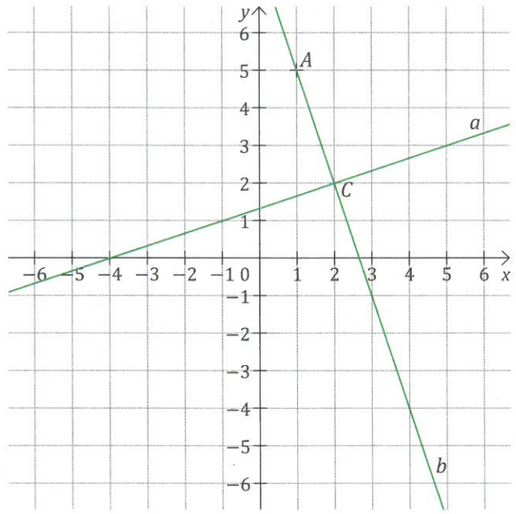
Je dána přímka p a bod $A\,[0; 1]$.



12 **Sestrojte přímku q kolmou k přímce p a procházející bodem A a napište její obecnou rovnici.**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Na přímkách a, b leží odvěsny rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku ABC s vrcholy $A\,[1; 5]$ a $C\,[2; 2]$.



13 **Znázorněte do obrázku bod B a napište rovnici přímky c, na které leží přepona trojúhelníku ABC.**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Body $A\,[-3; 0]$ a $C\,[0; 3]$ jsou vrcholy čtverce $ABCD$.

14 **Napište parametrickou rovnici přímky, na které leží úhlopříčka BD čtverce $ABCD$.**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Jsou dány body $A\,[1; 2]$ a $B\,[3; -2]$.

15 **Vypočtěte souřadnice průsečíků osy úsečky AB s osami x a y.**

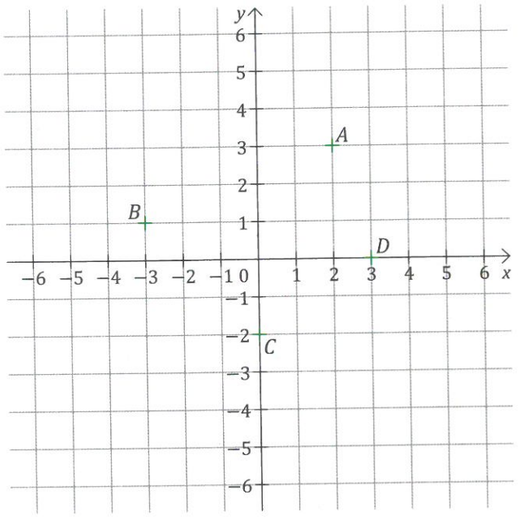
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Jsou dány přímky p: $2x - 3y + 1 = 0$ a q: $x = 1 + 2t, y = 1 - 3t, t \in \mathbb{R}$.

16 **Určete vzájemnou polohu přímek p a q.**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Jsou dány body $A\,[2; 3]$, $B\,[-3; 1]$, $C\,[0; -2]$, $D\,[3; 0]$.



17 Určete velikost vektoru (17.1–17.4) přiřazením příslušné hodnoty (A–F).

17.1 $|\overrightarrow{AB}| =$ .....

17.2 $|\overrightarrow{BC}| =$ .....

17.3 $|\overrightarrow{CD}| =$ .....

17.4 $|\overrightarrow{DA}| =$ .....

A) $\sqrt{13}$

B) $\sqrt{24}$

C) $\sqrt{18}$

D) $\sqrt{10}$

E) $\sqrt{9}$

F) $\sqrt{29}$

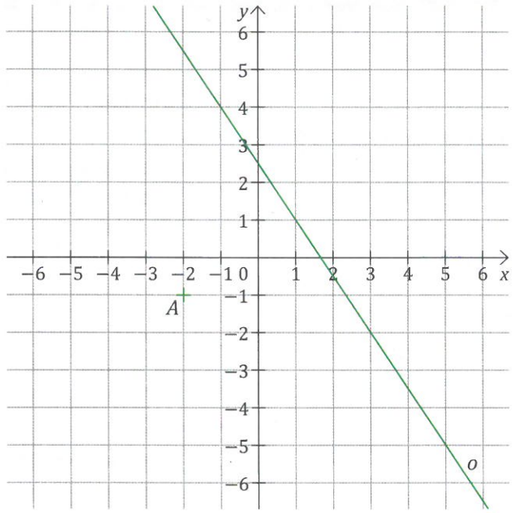
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

Body A, $B\,[1; 2]$ a $C\,[5; 2]$ tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C a stranou $b = 3$.

18 Vypočtěte délku přepony trojúhelníku.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

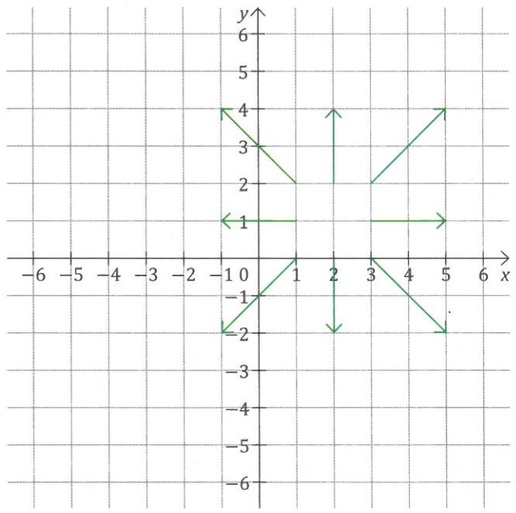
Přímka o je osou úsečky AB, $A\,[-2; -1]$.



19 Určete souřadnice bodu B a napište obecnou rovnici přímky AB.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Mezi vektory na obrázku je i vektor $\overrightarrow{AB} = (2; -2)$.



20 Napište souřadnice bodu A a bodu B.